	Hundert.	Zehner.	Einheiten.
1.	ρ.	ι.	α.
2.	σ.	κ.	β.
3.	τ.	λ.	γ.
4.	υ.	μ.	δ.
5.	φ.	ν	ε.
6.	χ.	ξ	ϛ βαῦ
7.	ψ.	ο.	ζ.
8.	ω.	π.	η.
9.	ϡ. σαμπι	ϟ. κοππα	θ.

Euclides.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΑ ῾ΕΞ ΠΡΟΤΕΡΑ

ΣΥΝ

῾ΕΝΔΕΚΑΤῼ ΚΑΙ ΔΩΔΕΚΑΤῼ.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

SEX LIBRI PRIORES

CUM

UNDECIMO ET DUODECIMO.

TEXTUM

E PEYRARDI RECENSIONE

IN USUM GYMNASIORUM

EDIDIT

GLOSSARIOQUE IN HOS OCTO LIBROS

INSTRUXIT

D. I. G. C. NEIDE.

HALIS SAXONUM

SUMTIBUS LIBRARIAE GEBAUERIANAE

1825.

Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus huic aliud comparare audeas; quibus fit, ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quaestionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem.

Cardanus.

PRAEFATIO.

Ex quo Matheseos studium in Germania tantopere adamari coepit atque coli, ut hodie vel in scholis, quas vocant, elementaribus prima eius elementa pueris delibanda tradantur, non defuerunt, qui hocce studium scriptis adiuvare ac promovere certatim anniterentur adeo, ut numerus librorum mathematicorum in dies increscat, utque in tanta eorum mole, iuvenibus ac pueris in manus tradendorum vix scias, quem in primis eligas atque commendes, cum alius aliis virtutibus splendeat, alius alia methodo eniteat, alius magistrorum alii magis arrideat, reique conveniens videatur.

Nihilo tamen minus inter Mathematum cultores eorumque iustos aestimatores vulgata atque firmata stat sententia, quam etiam KAESTNERUS, vir immortaliter de promoto inter Germanos studio mathematico meritus, saepius obtinebat: ut quisque liber mathematicus proxime Euclidea sequatur elementa, ita eundem maxime ceteris palmam praeripere *). Unde factum quoque videtur, ut D. LORENZII scripta, quae lectionibus mathematicis, in scholis habendis, sacraverat, utpote, quum enunciationum brevitate, tum demonstrationum elegantia, tum ordine lucido conspicua, ac fere Euclidem ipsum referentia, in plurimis scholis locum suum adhuc obtineant.

*) Ueber die unzähligen Lehrbücher kann ich nur sagen, dafs von dem eignen Werthe der Geometrie, Deutlichkeit und Gewifsheit, jedes desto weniger besitzt, je weiter es sich von Euclids Elementen entfernt. KAESTNERS Anfangsgr. d. Math. 6. Ausg. S. 453.

Idem ille Vir clarissimus, ipe studio methodi Euclideae innutritus illud eximie inter nostrates adiuvit versione vernacula Elementorum Euclidis, quorum tres exinde repetitae editiones sane testantur, hunc patrem omnis scientiae mathematicae adhuc suos amatores et cultores habere, atque in posterum magis magisque habiturum esse.

In tanto, quo omnes, qui non contenti sunt, μάθησιν primoribus tantum labris degustasse, quibusque illa Veterum ἀκρίβεια unice curae cordique est, Euclidem amplectuntur amore, in tanto, quo Mathematum studium promovere enituntur ardore, sane mirandum est, qui fieri potuerit, ut hucusque fere nusquam Euclidis Archetypon Graecum pro duce in lectionibus mathematicis Gymnasiorum adhiberi coeptum sit, in primis quum Kaestnerus linguae graecae rudimenta adeo ab Euclidis Elementis in scholis auspicanda esse censeat, idque ob eorum, sive respexeris ad res in iis objectas, quippe quae ad unam omnes per constructionem intuitioni repraesentari possint, facilitatem, sive ad stylum Euclidis, quo ullum scriptorem dilucidiorem et minus impeditum negat *).

Interim tantum abest, ut cum Kaestnero auctor sim, tirones statim ab initio ad Euclidem, ut ex eo graece discant, deducere, utpote qui nostris temporibus sat magna librorum graecorum elementarium copia obruti sumus, ut multo fructuosius mihi videatur, Euclidem graecum cum pueris et iuvenibus, iam aliqua graecae linguae scientia imbutis in scholis mathematicis legere, ut in huius attenta et curiosa lectione ingenia sensim sensimque severitati et brevitati in definiendo, ordini in demonstrando adsuescant, ad inve-

---

*) Ich habe manchmal den Gedanken gehabt, man könnte auf Schulen den Anfang im Gr. mit Euklids erstem Buche machen. In den Worten blieb keine Dunkelheit, weil man sie durch sinnliche Bilder erläutern kann, und in Absicht auf die Schreibart ist wohl kein Autor leichter. Gesch. d. Math. 1. B. S. 264.

nienda nova acuantur, veramque inde ac genuinam Matheseos et discendae et docendae methodum hauriant.

Quin id ipsum, quod demonstrationes theorematum et solutiones problematum, quae in versionibus Elementorum contractiores *) exhiberi solent, in textu graeco fusius, et cum anteriorum enunciationum diserta repetitione proferuntur, id ipsum, inquam, mihi saltem experientia edocto multo tutius ad scopum praefixum ducere videtur. Discentium enim animus hac methodo diutius in eadem re contemplanda retinetur, mirum in modum augetur attentio, roboratur memoria, imaginandi facultas exercetur, lucidus ordo in cogitando inde emergit, nova inveniendi studium excitatur et exardescit; ita demum bene per lectionem Euclidis praeparatis, et quasi subactis ingeniis aditus ad sublimioris Matheseos penetralia recte aperiri posse videtur.

Quam rationem meam quum saepius cum rei peritis, in scholis Mathesin docentibus, simulque graece doctis, communicassem, hique eam non improbassent, causam, quo minus hoc iam prius factum sit, in eo reperire sibi visi sunt, quod fere nulla extet Euclidis editio, quae usui scholastico inservire possit.

Consilio Kaestneriano satisfacturus vir doctus ante viginti et quod excurrit annos librum quidem primum Elementorum Eucl. graece typis recudendum curaverat **); attamen quum huius unius libri lectione omnis institutio mathematica, qualem in scholis exhiberi oportet, neutiquam absoluta et perfecta videatur, in hoc uno non acquiescendum fuit, sed potius, si non omnes Elementorum, at certe sex priores libri, una

*) Una tantum Hauffii V. C., quae Marburgi 1807. 8. prodiit, excepta, quaeque Eucl. textum presse sequitur. Digna sunt, quae non minus vere quam eleganter ab auctore (praef. p. XXI sq.) ad excusandam et defendendam hanc rationem dicta legantur.

**) Erstes Buch der Elem. d. Eucl. Für den ersten Unterricht in d. gr. Spr. und Math. Weimar 1800. 8.

cum undecimo et duodecimo usui scholastico typis repetendi erant; quod quum diu frustra exspectatum fuisset, ego ipse de edendis separatim hisce libris cogitare coepi, simulque ab amicis scholarumque magistris de exsequendo consilio saepius admonitus, eorum desiderio non satisfacere non potui, meque ad hoc negotium adcinxi.

Facturusne omnibus gratum acceptumque fuerim, qui textum secundum Parisiensem PEYRARDI editionem, multis in locis ab Oxoniensi diversum, exprimendum curaverim, dicere non ausim; erunt saltem, qui varietatem praecipuam a me textui submissam velint. Quod posterius, quo minus facerem, omnis huius editionis ratio, omneque consilium, soli discentium usui destinatae, me impediebat, probe reputantem, adiecta lectionis varietate plagularum numerum, indeque pretium libri praeter modum ac necessitatem auctum iri. Illud prius ii certe magistri non improbabunt, qui editione aut Oxoniensi aut Basileensi instructi, destituti autem Parisiensi *), (quae praeterquam versionibus, et latina et francogallica ditata — ne dicam dilatata — non minori etiam splendore quam luxurie impressa, tanto pretio venditur, quanto vix unus alterve magistrorum emere et velit, et queat,) diversitatem, quam PEYRARDUS, plus quam triginta codicibus inter se comparatis in suum textum recepit, ipsi sibi notare et excerpere cupiant.

Ut autem lector de variantibus huius editionis rectum iudicium statuere queat, apponere hic placuit, quae a S. S. V. V. LAGRANGE, LEGENDRE et DELAMBRE, quorum nomina et inter nostrates celebratissima sunt, ex auctoritate Instituti Franciae (*Institut de*

---

*) Titulus h. ed. est: Les oeuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français. D'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours. Par F. PEYRARD, traducteur des Oeuvres d'Archimède. Ouvrage approuvé par l'institut de France. Dedié au Roi. A Paris 1814. 4. III Tomes.

France) super his in genere ad classem mathematicam referenda censuerunt: „Ces variantes, comme on s'y „peut attendre, ne sont pas toutes de la même impor- „tance, et ne meritent pas toujours la préférence des „leçons imprimées. Parmi ces variantes, il en est, qui „consistent en quelques mots omis dans les imprimés, „dont les traducteurs avaint senti la necessité, et que „Grégori a fait entrer dans son texte, en les enfermant „entre deux crochets; quelquefois c'est un présent au „lieu d'un futur; ἔσται au lieu des ἐστὶν, ou recipro- „quement; le mot ἴσος au lieu de ὁ αὐτὸς, *égal*, pour „*le même*; des expressions plus ou moins conformes au „style ordinaire des géomètres, ou d'Euclide en parti- „culier. Toutes ces variantes n'auraient de valeur, „qu'aux yeux des philologues et des érudits; mais il en „est de vraiment dignes de l'attention des géomètres, „en ce quelles changent en mieux le sens, ou qu'elles „donnent un sens raisonnable, à ce qui n'en présentait „aucun." —

De his, gravioris momenti, lectionibus et variantibus, quae, quum plane et ab editionibus et versionibus hucusque impressis recedant, et solos Geometras offendere possint, ipse PEYRARDUS rationem reddendam lectoresque praemonendos esse putavit his verbis:

„Ex lectionibus variantibus quaedam praesertim sunt notandae."

„In omnibus editionibus graecis et latinis postulata 4, 5, 6 inter communes notiones collocata sunt."

„Demonstratio propositionis 7. lib. I. duos habet casus, et tamen unus solum casus demonstratur in omnibus Mss., nullo excepto, et in editionibus Bas. et Ox. Secundus casus est, cum punctum Δ incidit in triangulum ΑΒΓ, vel punctum Γ in triang. ΑΒΔ. Ut secundus casus demonstraretur, antea demonstrandum fuerat, lateribus aequalibus trianguli isoscelis productis, angulos sub basi inter se aequales esse; quod quidem Euclides demonstravit in prop. 5, et hoc tantum pro-

mirifice meritum, mecum sensisse et necessitatem et utilitatem studii Euclidis, mecum praevidisse, quantum denuo in scholis resuscitatum omni generi studiorum sit profuturum; *partim* iam laboris suscepti me poenitere coepisse, ex animo optantem, factum infectum reddi, neque omnem curam editionis huic viro relinquere posse. Postquam vero librum ipsum *) eiusque οἰκονομίαν propius inspexeram, facile mihi persuasi, Camereri editione hanc meam non modo non inutilem et supervacaneam reddi, sed potius alteram altera adiuvari, et peropportune accidisse, ut utraque fere eodem tempore prodierit.

Continet enim illa praeter textum, ad editiones, et Oxoniensem, et Basileensem, et Parisiensem accurate castigatum et recognitum, cum apparatu critico commentarium in omnes propositiones uberrimum, simulque versionem latinam. Habebunt itaque scholarum magistri, quibus placuerit Euclide pro duce in lectionibus mathematicis uti, omnia, quae antiquiores et recentiores interpretes ac commentatores, Proclus, Theon, Pappus, Clavius, Commandinus, Simson, Pfleiderer, multique alii, quorum recensum praefatio C. (p. IX sq.) exhibet, subinde ad illustrandum Euclidem contulerunt. Habebunt vero etiam simul discipuli in mea nudum textum, nullius laudis cupi-

*) Inscribitur nimirum: Euclidis Elementorum libb. sex priores, gr. et lat. Commentario e scriptis veter. ac recentior. mathematicorum et Pfleidereri maxime illustrati. Ed. I. G. Camerer. Tom. I. complectens lib. I—III. Berol. 1824. 8. Ex altero titulo, quem exemplari meo adiunctum reperi, coniicere licet, duumviros, Camererum et Hauberum (qui iam ante aliquot annos edenda *Chrestomathia geometrica, Tübing.* 1820. Veterum Geometrarum studium accendere conatus est) curam omnium Eucl. Elementorum coniunctim suscepisse; habebimus igitur propediem, praesertim quum editio, quam, ut in Indice librorum edendorum novissimo me legere memini, V. D. August molitur, huic sese adiunxerit, in Germania Euclidem ita dotatum, quali neque Anglia, neque Gallia, neque Italia hucusque gloriari poterat.

dum, nisi ut iuvenes habeant, quo commode et sine magnis impensis uti queant.

Linguae graecae studium, quod nostris his temporibus in Gymnasiis mirum in modum efflorescere coepit, in spem laetissimam inducit, fore, ut et magistri et discipuli non minori amore et alacritate amplexuri sint Euclidem, quam ceteros scriptores graecos; omnesque, qui literis sese tradiderunt, sibi persuadeant velim, ingenia studio mathematico, in primis Euclidis, probe exculta maximo cum fructu ad lectionem Philosophorum Graeciae, et in primis Platonis accessuros, qui et ipse Socratem ita loquentem introducit: τοῦ ἀεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ γνῶσίς ἐστιν. Ἕλκον ἄρα πρὸς ἀλήθειαν ψυχὴν εἴη ἂν καὶ ἀπεργαστικὸν φιλοσόφου διανοίας πρὸς τὸ ἄνω σχεῖν, ἃ νῦν κάτω, οὐ δέον, ἔχομεν *); quemque communis fama ab auditorio suo prohibuisse refert, quicunque ἀγεωμέτρητος intrare vellet.

Restat, ut iam pauca de methodo adiungamus, secundum quam in scholis haec elementa legenda censeamus. Lectionem nudam, et interpretationem grammaticam, qualis in ceteris auctoribus graecis atque latinis exhiberi solet, hic non sufficere, per se patet. Accedat constructio geometrica omnium problematum ac theorematum necesse est, ita, ut simulac verba textus graeci a discipulis audita fuerint, etiam eorum intuitioni repraesententur. Verum quidem est, praesto esse figuras geometricas in textus margine **), ut operae pretium vix videri possit, easdem denuo delineare velle; at prorsus alia res est, constructionem, omnibus partibus suis absolutam et perfectam uno obtutu oculis complecti, alia contra, figuram, singulis eius-

*) Plat. Πολιτ. VII. 9. p. 212. ed. Ast.

**) Non possum, quin hoc loco et diligentiae et elegantiae, qua vir honestissimus *Sturmius*, artifex Halensis, figuras geometricas in hac editione conspicuas, e ligno exsculpsit, multa cum laude mentionem faciam.

dem lineis, quibus contexta est, a prima origine sensim delineandis, donec absoluta et perfecta exeat, animo quasi comitari ac sequi, quod posterius, mirum quantum, discentes adiuvat, quo citius argumentationis vi ac robore perculsos se sentiant.

Equidem in hunc finem discipulorum alterum viva voce propositionem graece praeire, alterum, regula et circino instructum, figuras in tabula delineare iuberem. Eadem ratione ad demonstrationem theorematis transeundum esset, ita ut, qui ad tabulam constitutus est, verba praelegentis presse sequatur, singula in figura descripta virgula demonstrando, simulque unamquamque enunciationem signis mathematicis in tabula exarando. Finita demum quavis demonstratione, et propositio et demonstratio ab uno ceterorum, sive germanice, sive latine, sive graece, prout cuiusvis humeri valeant, repetenda foret.

Quae quidem via, quamvis longiuscula et nimis aspera videri possit, tamen eo tutius ad finem propositum ducere videtur, et spero fore iuvenes, qui difficultatibus, ab initio cum Euclidis lectione coniunctis, se absterreri non patiantur; macti potius virtute ceteros secum sursum proripiant, ac inconcussis et indefatigatis viribus semel coepta via progrediantur, probe memores effati illius Hesiodei, de ἀρετῇ loquentis, quod eodem iure de Mathesi eiusque studio valet:

μακρὸς δὲ καὶ ὄρθιος οἶμος ἐπ' αὐτὴν
καὶ τρηχὺς τὸ πρῶτον· ἐπὴν δ' εἰς ἄκρον ἵκηται,
ῥηϊδίη δ' ἤπειτα πέλει, χαλεπή περ ἐοῦσα.

Audendum est igitur, nilque desperandum duce et auspice probo alacrique magistro; non enim, ut verissime dicit Seneca: quia difficilia sunt, non audemus, sed, quia non audemus, difficilia sunt.

Scr. Giebichensteinii x Calendas Novembres MDCCCXXIIII.

N.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER PRIMUS.

ΟΡΟΙ.

α΄. ΣΗΜΕΙΟΝ ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β΄. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.

γ΄. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.

δ΄. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε΄. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ϛ΄. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

ζ΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η΄. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείαις κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ΄. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν εἰρημένην γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι΄. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

ια΄. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ΄. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ΄. Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

ιδ΄. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε΄. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια· πρὸς ἣν, ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προςπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ις΄. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη΄. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ιθ΄. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας, ἢ μείζονος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου.

κ΄. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

κα΄. Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

κβ΄. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

κγ΄. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κδ΄. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

κε΄. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

κς΄. Σκαληνὸν δὲ. τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κζ΄. Ἔτι τε, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

κη΄. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

κθ΄. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ΄. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον.

λα΄. Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

λβ΄. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

λγ΄. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

λδ΄. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

λε΄. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

α΄. Ἠτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν,

β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβάλλειν.

γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δ΄. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε΄. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖά τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

ϛ΄. Καὶ δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

α΄. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β΄. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ΄. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

δ΄. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

ε΄. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

ϛ΄. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

ζ΄. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

η΄. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

θ΄. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

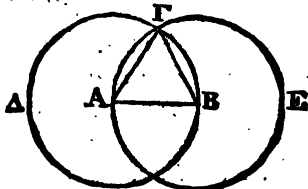
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

ΕΚΘΕΣΙΣ. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΓΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

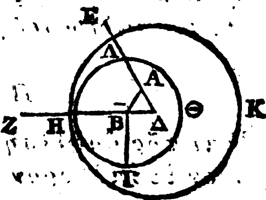
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνίσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ· καὶ πάλιν, κέντρῳ τῷ Δ, καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

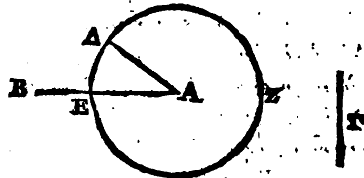
Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω γὰρ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

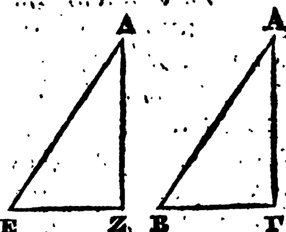


Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση. Ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴσα· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γω-



νίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. Ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει, ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει· εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος, τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

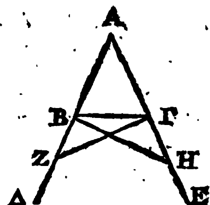
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ, προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.



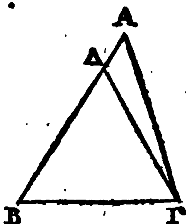
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν· τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση.

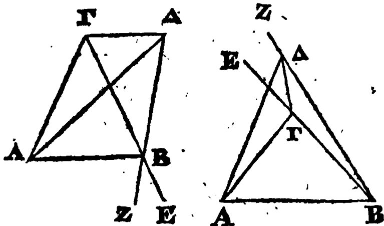
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ· καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Γ, Δ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ Α, Β· ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ

τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ· (καὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ Ε, Ζ.)

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΕ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΖ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΕ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση.

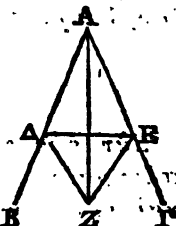
Α Δ Η
Β Γ Ε Ζ

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον, τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. Οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ

βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θʹ.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.



Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

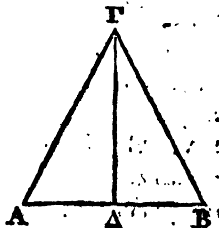
Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιʹ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.



Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,

καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.

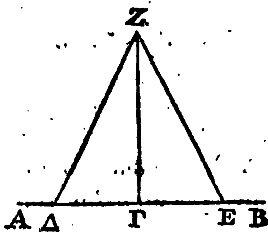
Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια΄.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.



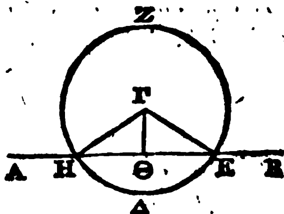
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστὶ, καί εἰσιν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ΄.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΘΗ, ΘΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσιν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

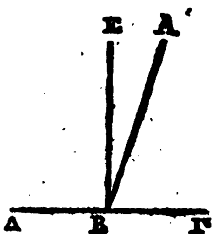
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω, τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι, ἤτοι δύο ὀρθαί εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. Εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ

ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

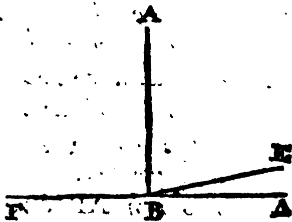


ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδʹ.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δυσὶ ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσί. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ. Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.



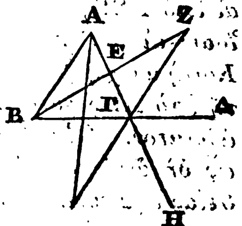
Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ *τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ* E *σημεῖον· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ* AEΓ *γωνία τῇ ὑπὸ* ΔEB, *ἡ δὲ ὑπὸ* ΓEB *τῇ ὑπὸ* AEΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ AE *ἐπ' εὐθεῖαν τὴν* ΓΔ *ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ* ΓEA, AEΔ· *αἱ ἄρα ὑπὸ* ΓEA, AEΔ *γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ* ΔE *ἐπ' εὐθεῖαν τὴν* AB *ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ* AEΔ, ΔEB· *αἱ ἄρα ὑπὸ* AEΔ, ΔEB *γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ* ΓEA, AEΔ *δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ* ΓEA, AEΔ *ταῖς ὑπὸ* AEΔ, ΔEB *ἴσαι εἰσί. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ* AEΔ, *λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ* ΓEA *λοιπῇ τῇ ὑπὸ* BEΔ *ἴση ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ* ΓEB, ΔEA *ἴσαι εἰσίν. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προςεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ABΓ, *καὶ προςεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ* BΓ *ἐπὶ τὸ* Δ· *λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ* AΓΔ, *μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῶν ὑπὸ* ΓBA, BAΓ *γωνιῶν.*



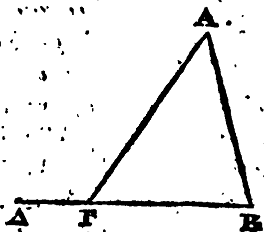
Τετμήσθω ἡ AΓ *δίχα κατὰ τὸ* E, *καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ* BE *ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ* Z, *καὶ κείσθω τῇ* BE *ἴση ἡ* EZ, *καὶ ἐπεζεύχθω ἡ* ZΓ, *καὶ διήχθω ἡ* AΓ *ἐπὶ τὸ* H.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AE *τῇ* EΓ, *ἡ δὲ* BE *τῇ* EZ, *δύο δὴ αἱ* AE, EB *δυσὶ ταῖς* ΓE, EZ *ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ* AEB *γωνίᾳ*

τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστὶ, κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. Μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ὁμοίως δὲ, τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ΄.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



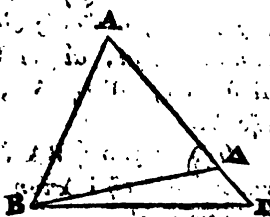
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. Ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.



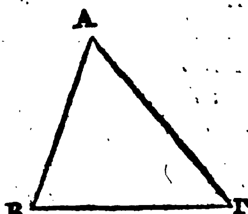
Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ. Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

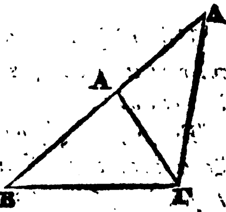


Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἢ ἐλάσσων· ἴση μενοῦν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. Οὐδὲ μὲν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ. Οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστί· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. Ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν· αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ. *Παντὸς ἄρα*, καὶ τὰ ἑξῆς.

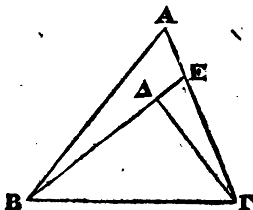
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ πλευραὶ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσι· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσι. Πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσι.



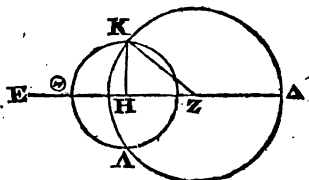
Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί· τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. Διὰ ταῦτα τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ

μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ΄.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου, τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.



Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.

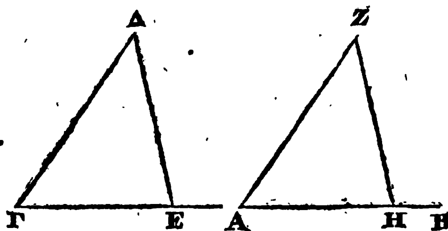
Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνίσταται τὸ ΚΖΗ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, *τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ* Α, *ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ* ΔΓΕ· *δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ* ΑΒ, *καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ* Α, *τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ* ΔΓΕ *ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.*



Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ *τυχόντα σημεῖα τὰ* Δ, Ε, *καὶ ἐπεζεύχθω ἡ* ΔΕ· *καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς* ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, *τρίγωνον συνεστάτω τὸ* ΑΖΗ, *ὥςτε ἴσην εἶναι τὴν μὲν* ΓΔ *τῇ* ΑΖ, *τὴν δὲ* ΓΕ *τῇ* ΑΗ, *καὶ ἔτι τὴν* ΔΕ *τῇ* ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ *δυσὶ ταῖς* ΖΑ, ΑΗ *ἴση εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ* ΔΕ *βάσει τῇ* ΖΗ *ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ* ΔΓΕ *γωνίᾳ τῇ ὑπὸ* ΖΑΗ *ἐστὶν ἴση.*

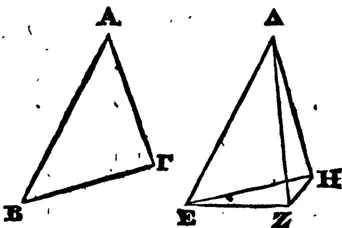
Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, *καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ* Α, *τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ* ΔΓΕ *ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται ἡ ὑπὸ* ΖΑΗ. *Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.



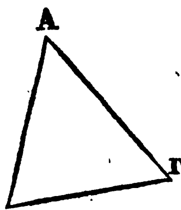
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ, τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. Καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. Ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ·

βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν.





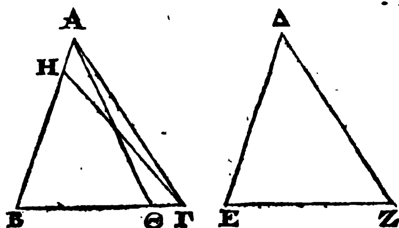
Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων· ἴση μενοῦν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ. Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν, ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων, εἰ δυνατὸν, ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ.

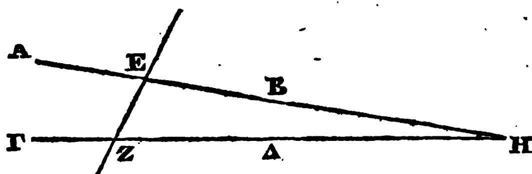
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ, ὅπερ ἀδύ-

νατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



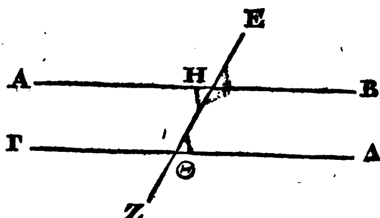
Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται, ἤτοι ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ ΑΓ. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη κατὰ τὸ Η.

Τριγώνου δὴ τοῦ ΕΗΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ ΑΓ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ

τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ HΘΔ ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ BHΘ, HΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ EHB τῇ ὑπὸ HΘΔ; ἀλλὰ ἡ ὑπὸ EHB τῇ ὑπὸ AHΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ AHΘ ἄρα τῇ ὑπὸ HΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ BHΘ, HΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ AHΘ, BHΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ AHΘ, BHΘ ταῖς ὑπὸ BHΘ, HΘΔ ἴση εἰσί. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ BHΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AHΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ HΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

(confer fig. praecedentem.)

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς AB, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ EZ· λέγω ὅτι τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ AHΘ, HΘΔ ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ HΘΔ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ BHΘ, HΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ *τῇ ὑπὸ* ΗΘΔ, *μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ* ΑΗΘ *τῆς ὑπὸ* ΗΘΔ. *Κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ* ΒΗΘ· *αἱ ἄρα ὑπὸ* ΑΗΘ, ΒΗΘ *τῶν ὑπὸ* ΒΗΘ, ΗΘΔ *μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ* ΑΗΘ, ΒΗΘ *δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ* ΒΗΘ, ΗΘΔ *δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα* ΑΒ, ΓΔ *ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ* ΑΗΘ *τῇ ὑπὸ* ΗΘΔ· *ἴση ἄρα.*

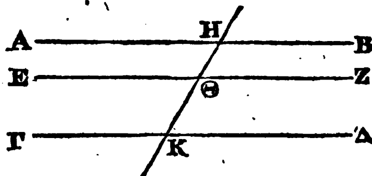
Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ *τῇ ὑπὸ* ΕΗΒ *ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ* ΕΗΒ *ἄρα τῇ ὑπὸ* ΗΘΔ *ἐστὶν ἴση.*

Κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· *αἱ ἄρα ὑπὸ* ΕΗΒ, ΒΗΘ *ταῖς ὑπὸ* ΒΗΘ, ΗΘΔ *ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ* ΕΗΒ, ΒΗΘ *δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ* ΒΗΘ, ΗΘΔ *ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ *τῇ* ΕΖ *παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ* ΑΒ *τῇ* ΓΔ *ἐστὶ παράλληλος.*

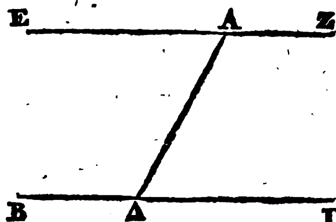


Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ *εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ* ΗΚ, *ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ* ΑΗΘ *τῇ ὑπὸ* ΗΘΖ. *Πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας τὰς* ΕΖ, ΓΔ *εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ* ΗΚ, *ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ* ΗΘΖ *τῇ ὑπὸ* ΗΚΔ. *Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ* ΑΗΚ *τῇ ὑπὸ* ΗΘΖ *ἴση. Καὶ ἡ ὑπὸ* ΑΗΚ *ἄρα τῇ ὑπὸ* ΗΚΔ *ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ* ΑΒ *τῇ* ΓΔ. *Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ, διὰ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

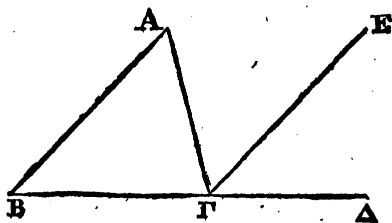
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἤχθω γὰρ, διὰ τοῦ Γ σημείου, τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

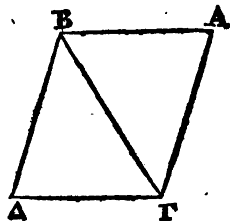
Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ *τῇ* ΓΕ, *καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ* ΑΓ, *αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ* ΒΑΓ, ΑΓΕ *ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ* ΑΒ *τῇ* ΓΕ, *καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ* ΒΔ· *ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ* ΕΓΔ *ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ* ΑΒΓ· *Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ* ΑΓΕ *τῇ ὑπὸ* ΒΑΓ *ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ* ΑΓΔ *ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ* ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· *αἱ ἄρα ὑπὸ* ΑΓΔ, ΑΓΒ *τρισὶ ταῖς ὑπὸ* ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ *ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ* ΑΓΔ, ΑΓΒ *δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ* ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ *ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ΄.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, *καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ* ΑΓ, ΒΔ· *λέγω ὅτι καὶ αἱ* ΑΓ, ΒΔ *ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.*



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΓ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ *τῇ* ΓΔ, *καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ* ΒΓ, *αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ* ΑΒΓ, ΒΓΔ *ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ* ΑΒ *τῇ* ΓΔ, *κοινὴ δὲ ἡ* ΒΓ, *δύο δὴ αἱ* ΑΒ, ΒΓ, *δυσὶ ταῖς* ΓΔ, ΒΓ *ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ* ΑΒΓ *γωνίᾳ τῇ ὑπὸ* ΒΓΔ *ἴση ἐστίν. Βάσις ἄρα ἡ* ΑΓ *βάσει τῇ* ΒΔ *ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ* ΑΒΓ *τρίγωνον τῷ* ΒΓΔ *τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ* ΑΓΒ *γωνία τῇ ὑπὸ* ΓΒΔ. *Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς* ΑΓ, ΒΔ *εὐθεῖα ἐμπίπτουσα*

ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. Αἱ ἄρα τὰς ἴσας, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

(conf. fig. praeced.)

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

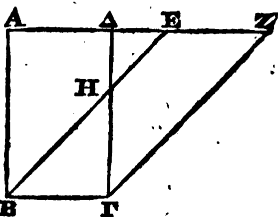
Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ *διάμετρος δίχα τέμνει τὸ* ΑΓΔΒ *παραλληλόγραμμον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ *ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς* ΒΓ *καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς* ΑΖ, ΒΓ· *λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ* ΑΒΓΔ *τῷ* ΕΒΓΖ.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, *ἴση ἐστὶν ἡ* ΑΔ *τῇ* ΒΓ. *Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ* ΕΖ *τῇ* ΒΓ *ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ* ΑΔ *τῇ* ΕΖ *ἐστὶν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ* ΔΕ· *ὅλη ἄρα ἡ* ΑΕ *ὅλη τῇ* ΔΖ *ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ* ΑΒ *τῇ* ΔΓ *ἴση· δύο δὴ αἱ* ΕΑ, ΑΒ *δυσὶ ταῖς* ΖΔ, ΔΓ *ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ* ΖΔΓ *γωνίᾳ τῇ ὑπὸ* ΕΑΒ *ἐστὶν ἴση, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ* ΕΒ *βάσει τῇ* ΖΓ *ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ* ΕΑΒ *τρίγωνον τῷ* ΔΓΖ *τριγώνῳ ἴσον ἔσται. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ* ΔΗΕ· *λοιπὸν ἄρα τὸ* ΑΒΗΔ *τραπέζιον λοιπῷ τῷ* ΕΗΓΖ *τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ* ΗΒΓ *τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ* ΑΒΓΔ *παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ* ΕΒΓΖ *παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἑξῆς.*

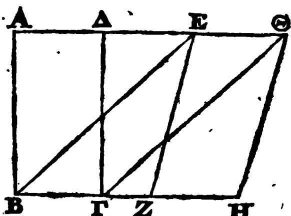
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ *ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν* ΒΓ, ΖΗ *καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς* ΑΘ, ΒΗ· *λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ* ΑΒΓΔ *παραλληλόγραμμον τῷ* ΕΖΗΘ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. Εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΕ, ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ αἱ ΕΒ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ, ταῖς ΒΓ, ΑΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστὶν ἴσον. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἑξῆς.

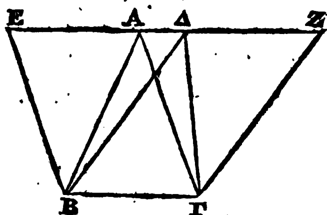


ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ΄.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ.



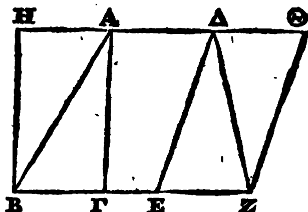
Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· καὶ εἰσιν ἴσα· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλή-

λοις ἐστὶν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη΄.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΕΖ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.



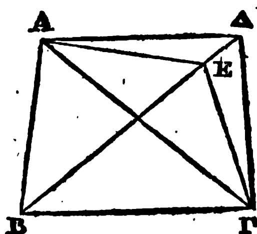
Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΖ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.



Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθεῖα παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστὶν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα, καὶ τὰ ἑξῆς.

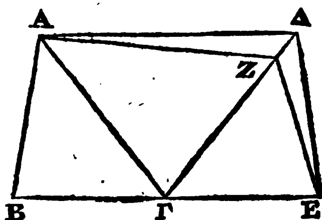
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΔΓΕ τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

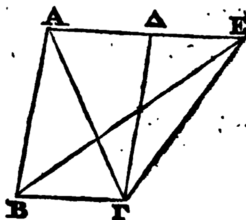


ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα΄.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιον ἐστὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΕΒΓ τριγώνου.



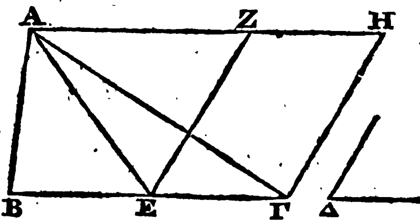
Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνόν τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ΄.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ.

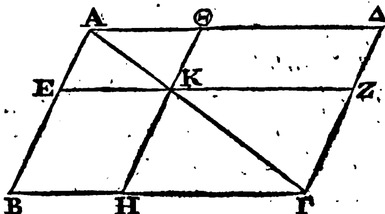
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ ΑΚ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ

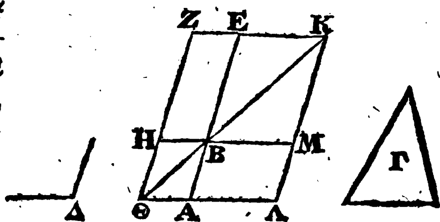
παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΚΔ παραπληρώματι ἐστὶν ἴσον. Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῷ Δ γωνίᾳ.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥςτε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΒΑ, καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ ἄρα γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσίν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα.

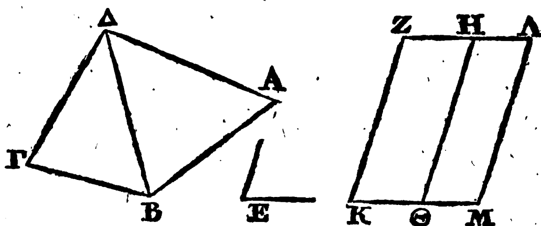


Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. Ἀλλὰ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΒ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ, ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἴση ἐστὶ τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΘΗ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ, ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἐστὶν ἴση. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΚ, ΘΜ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ

γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΖ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ· καὶ ἡ ΚΖ ἄρη τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ, καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΔΒΓ τῷ ΗΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

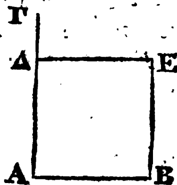
Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ ΚΖΛΜ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ Ε. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛʹ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α, πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ· διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ.

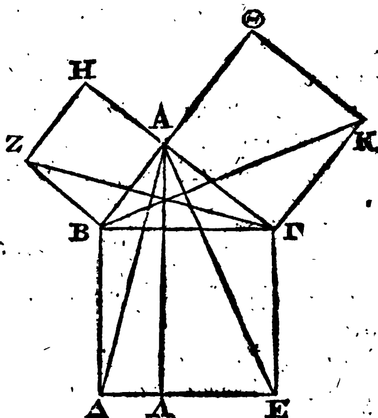


Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. Ἀλλὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. Τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι

ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ABE, BEΔ γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ AΔEB. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καί ἐστιν ἀπὸ τῆς AB εὐθείας ἀναγεγραμμένον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ΄.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.



Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ABΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ BAΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς BΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA, AΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς BΓ τετράγωνον τὸ BΔEΓ· ἀπὸ δὲ τῶν BA, AΓ τὰ HB, ΘΓ· καὶ διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν BΔ, ΓE παράλληλος ἤχθω ἡ AΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AΔ, ZΓ.

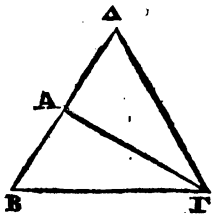
Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ BAΓ, BAH γωνιῶν· πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ BA, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A, δύο εὐθεῖαι αἱ AΓ, AH, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓA τῇ AH. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ BA τῇ AΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔBΓ γωνία τῇ ὑπὸ ZBA, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ABΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔBA ὅλῃ τῇ ὑπὸ ZBΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔB τῇ BΓ, ἡ δὲ ZB τῇ BA· δύο δὴ αἱ ΔB, BA δυσὶ ταῖς ΓB, BZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔBA γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ZBΓ

ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΗ τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. Ὁμοίως δὲ, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ, δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφὲν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις. Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη΄.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ,

ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SECUNDUS.

ΟΡΟΙ.

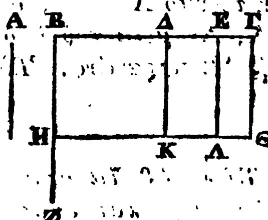
α'. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

β'. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η

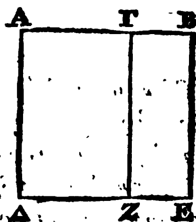
τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΒΘ τοῖς ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὰ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΔΛ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΒΗ, τῇ Α· καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Α, ΒΔ, καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ. Ἐὰν ἄρα ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.

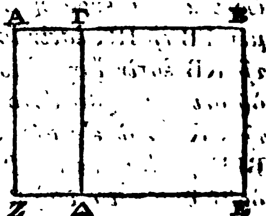
Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ· καί ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον

ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.



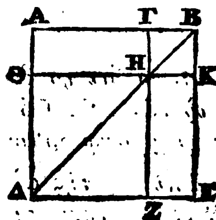
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ, καὶ διήχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ, ΓΕ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχει τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗΖ, διὰ

δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΑ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπεσεν ἡ ΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΒΓΗ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ. Ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τοῦτ' ἔστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καί ἐστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἔστι δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τὰ τέσσαρα ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΚΑΙ ΑΛΛΩΣ.

Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἐπεὶ

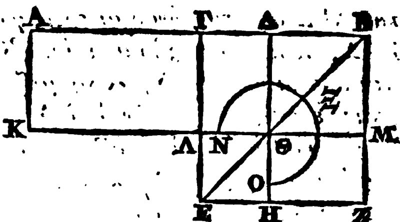
παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, τοῦ ΑΒΔ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί· καί εἰσιν ἴσαι· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Α· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ. Ἔχει δὲ καὶ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΓΒΚ γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ τετράγωνά ἐστι, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καὶ ἔστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση ἐστὶ γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἔστι δὲ καὶ τὰ ΓΚ, ΘΖ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τὰ ΓΚ, ΘΖ καὶ τὰ ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.



Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ, λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

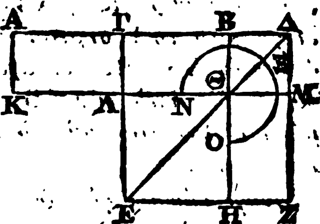
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΘΖ παραπληρώματι, κοινὸν προςκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΓΜ τῷ ΑΛ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστί. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΝΞΟ γνώμον, ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προςτεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προςκειμένῃ καὶ τῆς προςκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγ-

κειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προςκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.



Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προςκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ· διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜ· καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ ἄρα τῷ ΘΖ ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΛΑ ἄρα τῷ ΘΖ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμωνί ἐστιν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΛΗ. Ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος πε-

περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.



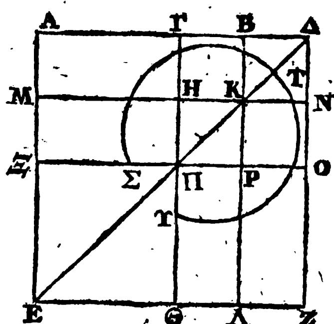
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προςκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα ΑΖ, ΓΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. Ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ὁ ΚΛΜ ἐστὶ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΛΜ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. Ἔστι δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΖ τῇ ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΘΝ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ ὁ ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ τὸ ΓΖ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐ–



Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ *τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ* Γ *σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΓ *περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΑΓ *τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς* ΑΒ, ΒΓ *ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.*

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΒ *εὐθεῖα ἡ* ΒΔ, *καὶ κείσθω ἴση τῇ* ΓΒ *ἡ* ΒΔ, *καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς* ΑΔ *τετράγωνον τὸ* ΑΕΖΔ, *καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.*

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ *τῇ* ΒΔ, *ἀλλὰ ἡ μὲν* ΓΒ *τῇ* ΗΚ *ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ* ΒΔ *τῇ* ΚΝ, *καὶ ἡ* ΗΚ *ἄρα τῇ* ΚΝ *ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ* ΠΡ *τῇ* ΡΟ *ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν* ΓΒ *τῇ* ΒΔ, *ἡ δὲ* ΗΚ *τῇ* ΚΝ· *ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ μὲν* ΓΚ *τῷ* ΒΝ, *τὸ δὲ* ΗΡ *τῷ* ΚΟ. *Ἀλλὰ τὸ* ΓΚ *τῷ* ΡΝ *ἐστὶν ἴσον, παραπληρώματα γὰρ τοῦ* ΓΟ *παραλληλογράμμου· καὶ τὸ* ΒΝ *ἄρα τῷ* ΗΡ *ἴσον ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ* ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ *ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ* ΓΚ. *Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ* ΓΒ *τῇ* ΒΔ, *ἀλλὰ ἡ μὲν* ΒΔ *τῇ* ΒΚ, *τοῦτ' ἔστι τῇ* ΓΗ *ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ* ΓΒ *τῇ* ΗΚ, *τοῦτ' ἔστι τῇ* ΗΠ *ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ* ΓΗ *ἄρα τῇ* ΗΠ *ἴση ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν* ΓΗ *τῇ* ΗΠ, *ἡ δὲ* ΠΡ *τῇ* ΡΟ· *ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν* ΑΗ *τῷ* ΜΠ, *τὸ δὲ* ΠΛ *τῷ* ΡΖ. *Ἀλλὰ τὸ* ΜΠ *τῷ* ΠΛ *ἐστὶν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ* ΜΛ *παραλληλογράμμου· καὶ τὸ* ΑΗ *ἄρα τῷ* ΡΖ *ἴσον ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ* ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ *ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ* ΑΗ *τετραπλάσιά ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ* ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ *τοῦ* ΓΚ *τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτὼ ἃ περιέχει τὸν* ΣΤΥ *γνώμονα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ* ΑΚ. *Καὶ ἐπεὶ τὸ* ΑΚ *τὸ ὑπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΔ *ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ* ΚΒ *τῇ* ΒΔ· *τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΔ *τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ* ΑΚ. *Ἐδείχθη δὲ τοῦ* ΑΚ *τετραπλάσιος καὶ ὁ* ΣΤΥ *γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν* ΑΒ, ΒΔ *ἴσον ἐστὶ τῷ* ΣΤΥ *γνώμονι.*

Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι καὶ τῷ ΞΘ. Ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τοῦτ᾽ ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

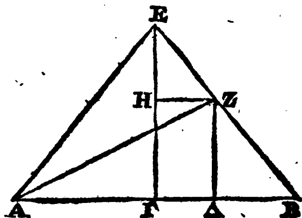
ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν, καὶ εἰσὶν ἴσαι· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΑ, ΓΑΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ



ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ: ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ πλευρᾷ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. Πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ, ἴση γάρ ἐστι πάλιν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

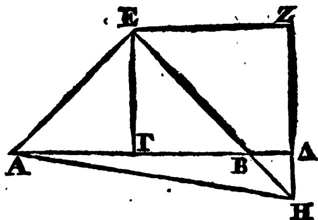
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προςτεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προςκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προςκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς

συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προςκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB *τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ* Γ, *προςκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ* BΔ· *λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν* AΔ, ΔB *τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν* AΓ, ΓΔ *τετραγώνων.*

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ *σημείου τῇ* AB *πρὸς ὀρθὰς ἡ* ΓE, *καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν* AΓ, ΓB, *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ* EA, EB· *καὶ διὰ μὲν τοῦ* E *τῇ* AΔ *παράλληλος ἤχθω ἡ* EZ· *διὰ δὲ τοῦ* Δ *τῇ* ΓE *πάλιν παράλληλος ἤχθω ἡ* ZΔ. *Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς* EΓ, ZΔ *εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ* EZ, *αἱ ὑπὸ* ΓEZ, EZΔ *ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ* ZEB, EZΔ *δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα* EB, ZΔ *ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ* BΔ *μέρη συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπεπτέτωσαν κατὰ τὸ* H, *καὶ ἐπεζεύχθω ἡ* AH.



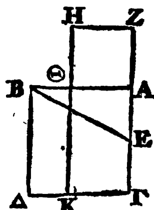
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΓ *τῇ* ΓE, *ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ* AEΓ *τῇ ὑπὸ* EAΓ, *καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ* Γ· *ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ* EAΓ, AEΓ. *Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ* ΓEB, EBΓ *ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ* AEB. *Καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ* EBΓ, *ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ* ΔBH. *Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ* BΔH *ὀρθή, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ* ΔΓE, *ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ* ΔHB *τῇ ὑπὸ* ΔBH *ἐστὶν ἴση, ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ* BΔ *πλευρᾷ τῇ* ΔH *ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ* EHZ *ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ* Z, *ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ* Γ· *λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ* ZEH *ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ* EHZ *γωνία τῇ ὑπὸ* ZEH· *ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ* HZ *πλευρᾷ τῇ* ZE *ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ* EΓ *τῇ* ΓA, *ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς* EΓ *τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς* ΓA *τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν* EΓ, ΓA *τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς* ΓA *τε-*

τραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. Ἴση δὲ ΕΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Ἴση δὲ ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια΄.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ὑπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διήχθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ διήχθω ἡ ΗΘ ἐπὶ τὸ Κ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΑΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ τὸ ΖΚ, ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ δὲ ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ.

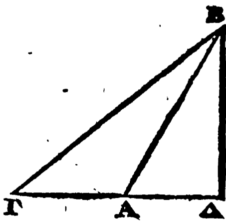
Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥςτε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ καθέτος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

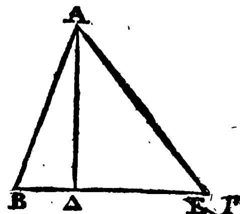
Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Α σημεῖον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥςτε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μεῖζόν ἐστι, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις, καὶ τὰ ἑξῆς.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνόν ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Δ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν

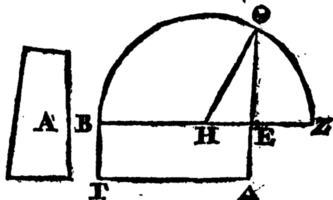
ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥςτε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὴ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνεστάτω γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. Συνίσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὐ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ,

ΕΗ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ τὸ ὑπὸ ΒΕ, ΕΔ ἐστὶν, ἴση γὰρ ΖΕ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. Ἴσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ· καὶ τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνίσταται, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER TERTIUS.

ὍΡΟΙ.

α΄. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσίν· ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

β΄. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον ἐπὶ μηδέτερα μερή.

γ΄. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ΄. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι.

ε΄. Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

ϛ΄. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ΄. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η΄. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ΄. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

ι'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

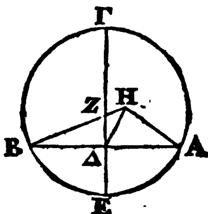
ια'. Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἤχθω τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΗ δυσὶ ταῖς ΔΗ, ΒΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γὰρ τοῦ Η· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΔΒ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΔΒ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλό τι πλὴν τοῦ Ζ.

Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ.

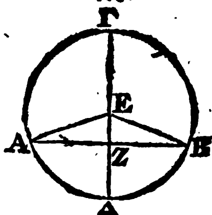
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προςεκβέβληται ἡ ΑΕΒ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. Ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. Ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα πεσεῖται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶ ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ δυσὶν ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΖΒ ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΒΖΕ. Ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα τὴν ΑΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

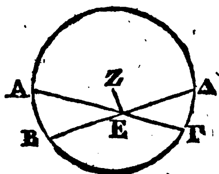
Ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτ' ἔστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΑΖ, ΕΖΒ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ, ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

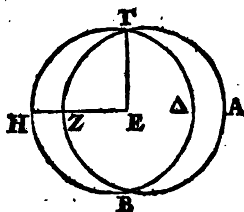
Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΑ. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΑ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΑ τῇ ὑπὸ ΖΕΒ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΗ ὡς ἔτυχε.



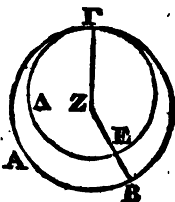
Καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΗ. Ἐδείχθη δὲ ἡ ΕΓ καὶ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΗ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ΄.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ΖΕΒ.

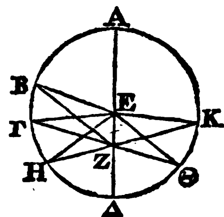


Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΒΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ΖΓ τῇ ΖΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προςπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες· μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προςπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προςπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ΕΒ, ΕΖ ἄρα τῆς ΒΖ μείζονές εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ, αἱ ἄρα ΒΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΖ· μείζων ἄρα ἡ ΑΖ τῆς ΒΖ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ΖΕ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν.

Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΗΖ μείζων ἐστίν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΕΔ· αἱ ἄρα ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ λοιπῆς τῆς ΖΔ μείζων ἐστί. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· μείζων δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόνον ἴσαι προςπεσοῦνται πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. Συνιστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε, τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προςπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατὸν, προςπιπτέτω ἡ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ· καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΘΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

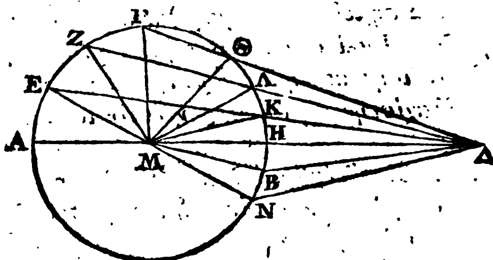
Ἢ καὶ οὕτως. *Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΚ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΖΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προςπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον

τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προςπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ, ΜΔ. Αἱ δὲ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΖΜ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΖΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστί. Βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν,

ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστί· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΔΚ ἐλάσσων ἐστίν, ἐλαχίστη ἄρα ἐστί. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΛΔ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν, αἱ ΜΚ, ΚΔ ἄρα τῶν ΜΛ, ΛΔ ἐλάττονές εἰσιν· ἴση δὲ ἡ ΜΚ τῇ ΜΛ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΛ ἐλάττων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης. Συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ, τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΔ δυσὶ ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἐστὶν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη.

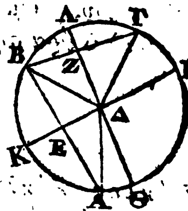
Ἢ καὶ ἄλλως. Ἐπεζεύχθω ἡ ΜΝ. Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΜΝ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, καὶ βάσις ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ἀπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΚΜΔ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης προσπεσοῦνται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι

πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

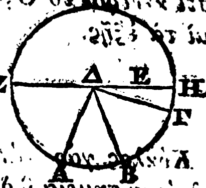


Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΖΔ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Κ, Η, Λ, Θ σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ἴση ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσί· καὶ βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν· ἡ ΗΚ ἄρα τὴν ΑΒ τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς. Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς ΗΚ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ εὐθεῖαι, ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η σημεῖα· ἡ ΖΗ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΖΗ διαμέτρου εἴληπταί τι σημεῖον τὸ Δ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, μεγίστη μὲν ἔσται ἡ ΔΗ

ΑΛΛΩΣ.

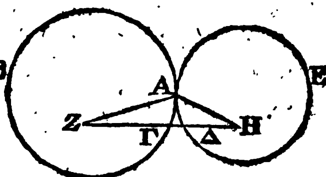
Ἀλλὰ δὴ πιπτέτω ὡς ἡ ΗΖΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΗΖΓ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΖ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ μείζους εἰσὶ τῆς ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΖΑ ἴση ἐστὶ τῇ ΖΓ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΖΘ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΗΔ τῆς ΗΘ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ὁμοίως, κἂν ἐκτὸς ᾖ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον, τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται.



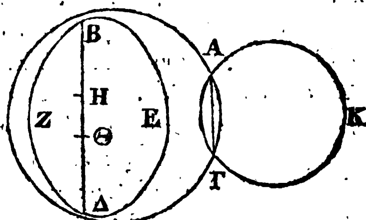
Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἐρχέσθω ὡς αἱ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ ἴση· αἱ ἄρα ΖΑ, ΑΗ ταῖς ΖΓ, ΔΗ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ, ΑΗ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐφάπτηται ἐάν τε ἐκτός.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ΑΒΔΓ κύκλου τοῦ ΕΒΖΔ ἐφαπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ Β, Δ.



Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΔΓ κύκλου κέντρον, τὸ Η· τοῦ δὲ ΕΒΖΔ, τὸ Θ.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τὰ Β, Δ πεσεῖται. Πιπτέτω ὡς ἡ ΒΗΘΔ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ· μείζων ἄρα ἡ ΒΗ τῆς ΘΔ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΘΔ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐκτός. Εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ΑΓΚ κύκλου τοῦ ΑΒΔΓ ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ Α, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ΑΒΔΓ, ΑΓΚ εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Γ, ἡ ἄρα ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται. Ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΔΓ ἐντὸς ἔπεσε, τοῦ δὲ ΑΓΚ ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντός. Κύκλος ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΓΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστίν, ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ. Ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

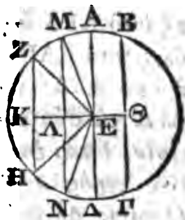
Ἀλλὰ δὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τουτ' ἔστιν, ἴση ἔστω ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστὶν ἴσον, ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΖ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλῆ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε΄.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τοῦ Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. Κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΛΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΑΔ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἐστίν. Ἀλλ᾽ αἱ ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ, ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ, γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ΄.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ; ἀλλ' εἰ δυνατὸν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς ἄρα πιπτέτω, ὡς ἡ ΑΕ.

Λέγω δὴ ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. Ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γάρ ἐστί τις γωνία εὐθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα παρεμπεσεῖται, ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε

τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. Οὐ παρεμπίπτει δὲ· οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὲν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον. Ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῶν ΒΓΔ, ΑΖΗ κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΒ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν πρὸς τῷ Ε· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΕΒΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ

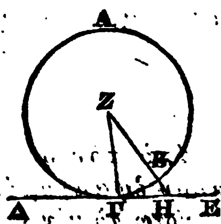
τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΔΖ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ. Καὶ ἐστὶν ἡ ΕΒ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΑ κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου τοῦ Α τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΒ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.



Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΖΗ.

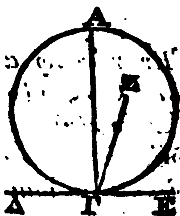
Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ. Ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ΖΒ τῆς ΖΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ΄.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἀπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΑ·

λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλάσιαί εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶ διπλῆ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπο ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστὶ διπλῆ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶ διπλῆ.



Κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΗΔΓ, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΗΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΔΓ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



Εἰλήφθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστὶ διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

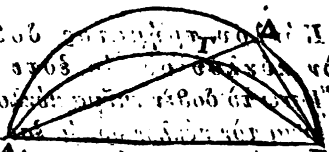
Ἐπεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΒΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ, τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ

ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ΄.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

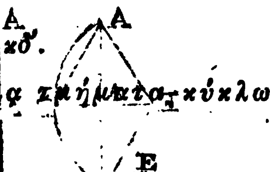
Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.



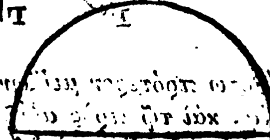
Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμῆμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ΄.

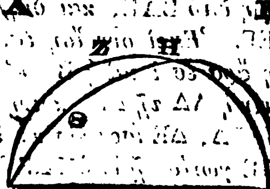
Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῆς ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα τῷ ΓΖΔ τμήματι.



Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΕΒ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· τῆς δὲ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ



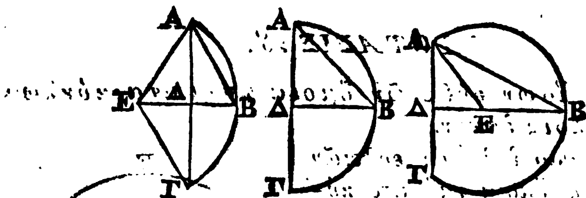
ἐφαρμοσθείσης, ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. Εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα· καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται. Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

Ἔστω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου, τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπέρ ἐστι τὸ ΑΒΓ τμῆμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἄρα τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἤτοι μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων.



Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΔΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ εὐθεῖα εὐθείᾳ τῇ ΕΑ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΕ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΕ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ ἐδεί-

ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται προςαναγεγραμμένος κύκλος. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προςαναγέγραπται ὁ κύκλος. Καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου· διὰ τὸ, τὸ Ε κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυγχάνειν.

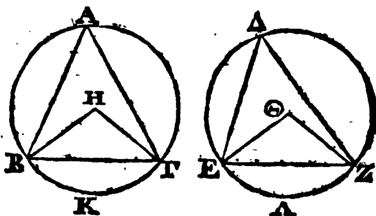
Ὁμοίως καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση ᾖ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, τῆς ΑΔ ἴσης γενομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προςαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συστησόμεθα πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίαν ἴσην, ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ ὡς τὸ Ε, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ τμῆμα μείζων ἡμικυκλίου.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προςαναγέγραπται ὁ κύκλος, οὗπέρ ἐστι τὸ τμῆμα. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.



Ἔστωσαν γὰρ ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐν αὐτοῖς, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν, αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ.

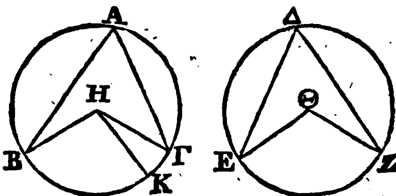
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ *κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ* ΒΗ, ΗΓ *δυσὶν ταῖς* ΕΘ, ΘΖ *ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ* Η *γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ* Θ *ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ* ΒΓ *βάσει τῇ* ΕΖ *ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ* Α *γωνία τῇ πρὸς τῷ* Δ, *ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ* ΒΑΓ *τμῆμα τῷ* ΕΔΖ *τμήματι, καὶ ἐστὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν* ΒΓ, ΕΖ· *τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ* ΒΑΓ *τμῆμα τῷ* ΕΔΖ *τμήματι. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ* ΑΒΓ *κύκλος ὅλῳ τῷ* ΔΕΖ *κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα* ΒΚΓ *τμῆμα λοιπῷ* ΕΛΖ *ἴσον· ἡ ἄρα* ΒΚΓ *περιφέρειά ἐστιν ἴση τῇ* ΕΛΖ *περιφερείᾳ. Ἐὰν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ, *ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν* ΒΓ, ΕΖ, *πρὸς μὲν τοῖς* Η, Θ *κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ* ΒΗΓ, ΕΘΖ, *πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ* ΒΑΓ, ΕΔΖ· *λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ* ΒΗΓ *γωνία τῇ ὑπὸ* ΕΘΖ *ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ* ΒΑΓ *τῇ ὑπὸ* ΕΔΖ *ἐστὶν ἴση.*



Εἰ γὰρ ἄνισος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ *τῇ ὑπὸ* ΕΘΖ, *μία αὐτῶν μείζων ἔσται.*

Ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, *καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ* ΒΗ *εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ* Η, *τῇ ὑπὸ* ΕΘΖ *γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ* ΒΗΚ· *αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ* ΒΚ *περιφέρεια τῇ* ΕΖ *περιφερείᾳ. Ἀλλ᾽ ἡ* ΕΖ *τῇ* ΒΓ *ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ* ΒΚ *ἄρα τῇ* ΒΓ *ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ* ΒΗΓ *γωνία τῇ ὑπὸ* ΕΘΖ· *ἴση ἄρα. Καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ* ΒΗΓ

ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Α, τῆς δὴ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη΄.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ, τὰς μὲν ΑΓΒ, ΔΖΕ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι, τὰς δὲ ΑΗΒ, ΔΘΕ ἐλάττονας· λέγω ὅτι ἡ μὲν ΑΓΒ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΖΕ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΗΒ ἐλάττων περιφέρεια τῇ ΔΘΕ ἐλάττονι.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

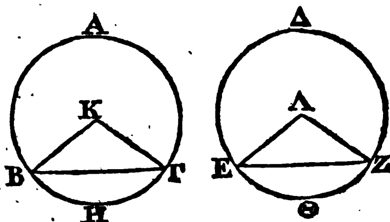
Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΒ δυσὶ ταῖς ΔΛ, ΛΕ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΔΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΛΕ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ περιφερείᾳ. Ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΖΕ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ΄.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύ-

χθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ εὐθεῖα τῇ ΕΖ.



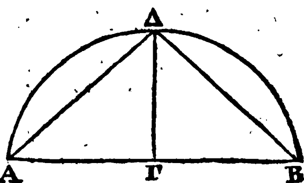
Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ ΑΔΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΔΒ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.



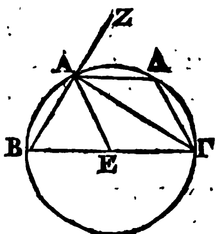
Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ· δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσί. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΔΒ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ περιφερείᾳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα΄.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς. Καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς.



Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. *Λέγω* ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ. *Πάλιν*, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΕ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΓ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, καὶ ἔστιν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Καὶ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστι, καὶ ἔστιν ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, η περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΑΔΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία ἐστὶν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΓΔ περιφερείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΑΛΛΩΣ.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ. *Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ* ΑΕΓ *τῆς ὑπὸ* ΒΑΕ, *ἴση γὰρ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ* ΑΕΒ *διπλῆ τῆς ὑπὸ* ΕΑΓ· *αἱ ἄρα ὑπὸ* ΑΕΒ, ΑΕΓ *διπλασίονές εἰσι τῆς ὑπὸ* ΒΑΓ. *Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ* ΑΕΒ, ΑΕΓ *δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἡ ἄρα ὑπὸ* ΒΑΓ *ὀρθή ἐστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ΠΟΡΙΣΜΑ.

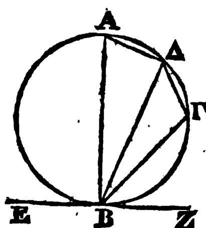
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐκτὸς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Ὅταν δὲ ἐφεξῆς ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ΄.

Ἐὰν κύκλου ἐφαπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ *ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα η* ΕΖ *κατὰ τὸ* Β *σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ* Β *σημείου διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν* ΑΒΓΔ *κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ* ΒΔ· *λέγω ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ* ΒΔ *μετὰ τῆς* ΕΖ *ἐφαπτομένης ἴσαι ἔσονται*

ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΒΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

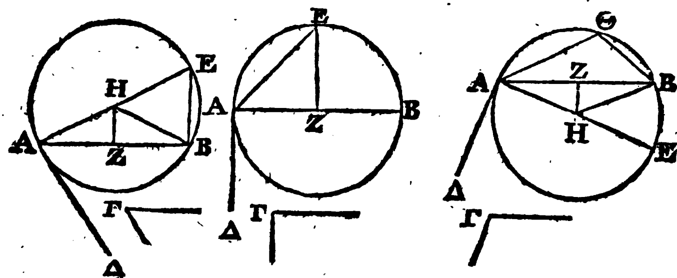
Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ΕΖ κατὰ τὸ Β, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ἡ ΒΑ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ, τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἡ δὲ πρὸς τῷ Γ γωνία ἤτοι ὀξεῖά ἐστιν, ἢ ὀρθή, ἢ ἀμβλεῖα.

Ἔστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς ἐπὶ πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἤχθω τῇ ΑΔ ἀπὸ τοῦ Α σημείου πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ. Καὶ



ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΗ δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. Γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΑΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ. Ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τῆς ΑΕ διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ Α, τῇ ΑΕ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΕ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἁφῆς εἰς τὸ ΑΒΕ κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου γέγραπται τὸ ΑΕΒ, δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΕΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ· καὶ δέον ἔστω πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ. Συνεστάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ κέν-

τρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν ΖΑ, ΖΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΒ. Ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΑΔ εὐθεῖα τοῦ ΑΒΕ κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι, ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστί. Καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ· γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεῖα ἔστω, καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπεὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δυσὶ ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. Ἐρχέσθω ὡς ὁ ΑΕΒ. Καὶ ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ᾽ ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. Καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένῃ γωνίᾳ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γέγραπται τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΒΓ· ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ ΒΑΓ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ *διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν, ὥςτε τὸ* Ε *κέντρον εἶναι τοῦ* ΑΒΓΔ *κύκλου· φανερὸν ὅτι, ἴσων οὐσῶν τῶν* ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, *καὶ τὸ ὑπὸ τῶν* ΑΕ, ΕΓ *περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν* ΔΕ, ΕΒ *περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.*

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ *διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ* ΑΒΓΔ *κύκλου, καὶ ἔστω τὸ* Ζ, *καὶ ἀπὸ τοῦ* Ζ *ἐπὶ τὰς* ΑΓ, ΔΒ *εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ* ΖΗ, ΖΘ, *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ* ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

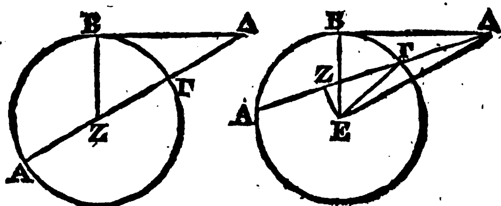
Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΗ *εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν* ΑΓ *πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ* ΑΗ *τῇ* ΗΓ. *Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ* ΑΓ *τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ* Η, *εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ* Ε, *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ΑΕ, ΕΓ *περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΗΕ *τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς* ΗΓ. *Προςκείσθω κοινὸν τὸ ἀπὸ τῆς* ΗΖ· *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ΑΕ, ΕΓ *μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν* ΖΗ, ΗΕ *ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν* ΓΗ, ΗΖ. *Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν* ΕΗ, ΗΖ *ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΕ, *τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν* ΓΗ, ΗΖ *ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΓ· *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ΑΕ, ΕΓ *μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΖΕ *ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς* ΖΓ. *Ἴση δὲ ἡ* ΖΓ *τῇ* ΖΒ· *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ΑΕ, ΕΓ *μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΕΖ *ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς* ΖΒ. *Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν* ΔΕ, ΕΒ *μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΖΕ *ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς* ΖΒ. *Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν* ΑΕ, ΕΓ *μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΖΕ *ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς* ΖΒ· *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ΑΕ, ΕΓ *μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΖΕ *ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν* ΔΕ, ΕΒ *μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΖΕ. *Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΕ· *λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν* ΑΕ, ΕΓ *περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν* ΔΕ, ΕΒ *περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προςπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε

σημεῖον καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ *εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ* Δ, *καὶ ἀπὸ τοῦ* Δ *πρὸς τὸν* ΑΒΓ *κύκλον προςπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ* ΔΓΑ, ΔΒ· *καὶ ἡ μὲν* ΔΓΑ *τεμνέτω τὸν* ΑΒΓ *κύκλον, ἡ δὲ* ΔΒ *ἐφαπτέσθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν* ΑΔ, ΔΓ *περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς* ΔΒ *τετραγώνῳ. Ἡ ἄρα* ΔΓΑ *ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν, ἢ οὔ.*



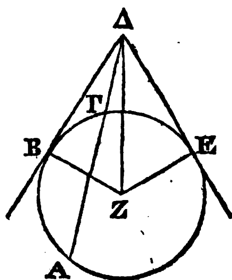
Ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ *κέντρον τοῦ* ΑΒΓ *κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ* ΖΒ· *ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ* ΖΒΔ. *Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ* ΑΓ *δίχα τέτμηται κατὰ τὸ* Ζ, *πρόςκειται δὲ αὐτῇ ἡ* ΓΔ· *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ΑΔ, ΔΓ *μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΖΓ *ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς* ΖΔ. *Ἴση δὲ* ΖΓ *τῇ* ΖΒ· *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ΑΔ, ΔΓ *μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΖΒ *ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς* ΖΔ. *Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς* ΖΔ *ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν* ΖΒ, ΒΔ, *ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ* ΖΒΔ· *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ΑΔ, ΔΓ *μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΖΒ *ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν* ΖΒ, ΒΔ. *Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΒ· *λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν* ΑΔ, ΔΓ *ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς* ΔΒ *ἐφαπτομένης.*

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ *μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ* ΑΒΓ *κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ* Ε, *καὶ ἀπὸ τοῦ* Ε *ἐπὶ τὴν* ΑΓ *κάθετος ἤχθω ἡ* ΕΖ, *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ* ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· *ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ* ΕΖΔ. *Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ* ΕΖ *εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν* ΑΓ *πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἡ* ΑΖ *ἄρα τῇ* ΖΓ *ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ* ΑΓ *τέτμηται δίχα κατὰ τὸ* Ζ *σημεῖον, πρόςκειται δὲ αὐτῇ ἡ* ΓΔ· *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ΑΔ, ΔΓ *μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς* ΖΓ *ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς* ΖΔ. *Κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΕ· *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ΑΔ, ΔΓ

μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Ἴση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τῷ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προςπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προςπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προςπιπτούσης· ἡ προςπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.



Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προςπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προςπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. Ἦν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ

ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΒ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ. Γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. Καὶ ἔστιν ἡ ΒΖ ἐκβαλλομένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται καὶ τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται κἂν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνῃ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUARTUS.

ὍΡΟΙ.

α′ Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

β′. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

γ′. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ′. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ε′. Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

ς′. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

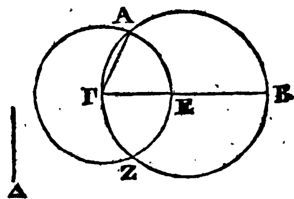
ζ′. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΒΓ. Εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείσθω τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ.



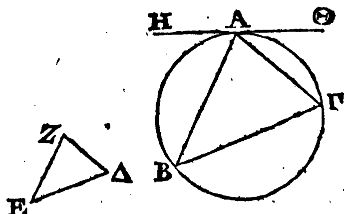
Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. Ἀλλὰ τῇ Δ ἡ ΓΕ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Δ, ἴση ἐνήρμοσται ἡ ΓΑ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.



Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ· πάλιν, πρὸς

πρὸς τῇ ΗΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΑ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον.

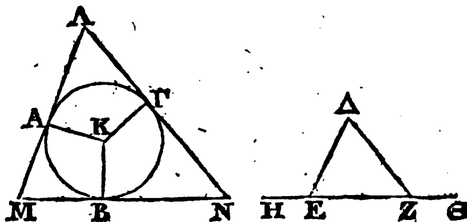
Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Περὶ τον δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ



ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ *κύκλου αἱ* ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ *κατὰ τὰ* Α, Β, Γ *σημεῖα, καὶ ἐπιζευγνύμεναί εἰσιν αἱ* ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ· *ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς* Α, Β, Γ *σημείοις γωνίαι. Καὶ ἐπεὶ τοῦ* ΑΜΒΚ *τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἐπεὶ δήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ* ΑΜΒΚ, *καὶ εἴσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ* ΜΑΚ, ΚΒΜ *γωνίαι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ* ΑΚΒ, ΑΜΒ *δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ* ΔΕΗ, ΔΕΖ *δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ* ΑΚΒ, ΑΜΒ *ταῖς ὑπὸ* ΔΕΗ, ΔΕΖ *ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ* ΑΚΒ *τῇ ὑπὸ* ΔΕΗ *ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ* ΑΜΒ *λοιπῇ τῇ ὑπὸ* ΔΕΖ *ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ* ΛΝΜ *τῇ ὑπὸ* ΔΖΕ *ἐστὶν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ* ΜΛΝ *λοιπῇ τῇ ὑπὸ* ΕΔΖ *ἐστὶν ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ* ΛΜΝ *τρίγωνον τῷ* ΔΕΖ *τριγώνῳ, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν* ΑΒΓ *κύκλον.*

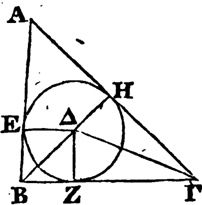
Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ΄.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· *δεῖ δὴ εἰς τὸ* ΑΒΓ *τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.*

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΓΒ *γωνίαι δίχα ταῖς* ΒΔ, ΓΔ *εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ* Δ *σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ* Δ *ἐπὶ τὰς* ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ *εὐθείας κάθετοι αἱ* ΔΕ ΔΖ, ΔΗ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ *γωνία τῇ ὑπὸ* ΔΒΓ, *ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ* ΒΕΔ *ὀρθῇ τῇ ὑπὸ* ΒΖΔ *ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ* ΕΒΔ, ΖΒΔ, *τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινὴν αὐτῶν τὴν* ΒΔ, *καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ* ΔΕ *τῇ* ΔΖ. *Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ* ΔΗ *τῇ* ΔΖ *ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ* ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ *ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν·*

ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτὰς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ Δ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ γραφόμενος κύκλος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Ἐγγεγράφθω ὡς ΖΕΗ.

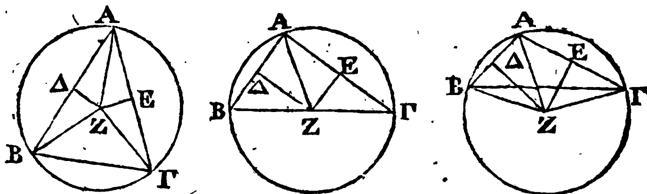
Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ ΕΖΗ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Δ, Ε σημείων ταῖς ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΖΕ· συμπεσοῦνται δὲ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς τῆς ΒΓ.



Συμπιπτέτωσαν οὖν ἐντὸς πρότερον κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΔ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῃ ΑΖ ἐστὶν ἴση, ὥςτε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος

ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Περιγραφέσθω ὡς ὁ ΑΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΑ ἐστὶν ἴση, ὥςτε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· ὁ ἄρα πάλιν κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Καὶ γεγράφθω ὡς ΑΒΓ.

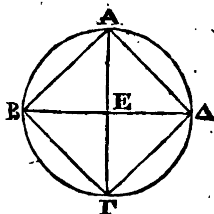
Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστιν· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τριγώνου πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν ἐλάττονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὥςτε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται αἱ ΔΖ, ΕΖ· ὅταν δὲ ὀρθὴ, ἐπὶ τῆς ΒΓ· ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.



Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ *κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ* ΑΓ, ΒΔ· *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ* ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

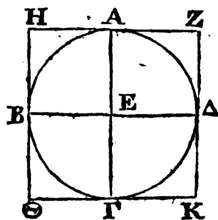
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ *τῇ* ΕΔ, *κέντρον γὰρ τὸ* Ε, *κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ* ΕΑ· *βάσις ἄρα ἡ* ΑΒ *βάσει τῇ* ΑΔ *ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν* ΒΓ, ΓΔ *ἑκατέρᾳ τῶν* ΒΑ, ΑΔ *ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ* ΑΒΓΔ *τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ* ΒΔ *εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τοῦ* ΑΒΓΔ *κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ* ΒΑΔ· *ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ* ΒΑΔ *γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ* ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ *ὀρθή ἐστιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ* ΑΒΓΔ *τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. Καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα* ΑΒΓΔ *κύκλον.*

Εἰς ἄρα δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ *τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ* ΑΒΓΔ. *Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ′.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· *δεῖ δὴ περὶ τὸν* ΑΒΓΔ *κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.*



Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ *κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ* ΑΓ, ΒΔ, *καὶ διὰ τῶν* Α, Β, Γ, Δ *σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ* ΑΒΓΔ *κύκλου αἱ* ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ *τοῦ* ΑΒΓΔ *κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ* Ε *κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ* Α *ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ* ΕΑ· *αἱ ἄρα πρὸς τῷ* Α *γωνίαι ὀρθαί εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς* Β, Γ, Δ *σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ* ΑΕΒ *γωνία, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ*

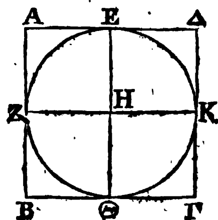
ὑπὸ ΕΒΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΑΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος. Ὥςτε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ τῇ ΒΕΔ ἐστὶ παράλληλος. Παραλληλόγραμμα ἐστὶ τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ΑΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΖΚ, ἡ δὲ ΕΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ΗΒΕΑ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. Καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.



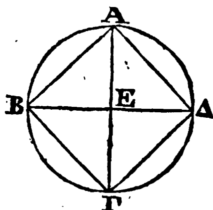
Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΑΔ, δίχα κατὰ τὰ Ζ, Ε σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια ἡ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ· ὥςτε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσίν, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΗ, ΗΕ ἐστὶν ἴση. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ,

ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Θ, Κ γωνίας· εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κυκλοῦ, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθείας. Ἐφάψεται αρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.



Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπεζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΑ, ΕΒ εὐθειῶν ἑκατέρᾳ τῶν ΕΓ, ΕΔ ἴση ἐστίν. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ

διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. Περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διαπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ τῷ Α, καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθεῖα ἡ ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προςπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προςπίπτει, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ· ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. Ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση. Αἱ

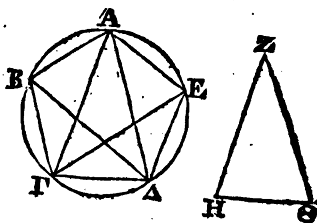
τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. Ἀλλ' ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥςτε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ εἰσὶ διπλασίους. Ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ διπλῆ. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶ διπλῆ.

Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνίσταται τὸ ΑΔΒ, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔΒ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.



Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥςτε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶ διπλῆ. Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίον ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε αρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι

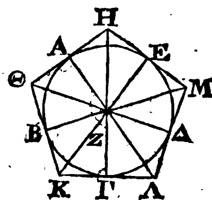
ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προςκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση. Καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.



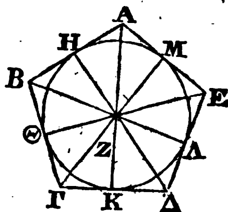
Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥςτε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας· καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ· καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ

τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ· ὥςτε τὰ ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΒΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἐστὶν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ΓΖΛ ἐστὶ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΛΔ τῆς ὑπὸ ΓΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. Καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΛΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΛΖΓ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΛ ἴση. Δύο δὴ τρίγωνα ἐστὶ τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. Καὶ ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση· καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΛ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ, ΚΛΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.



Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ τῇ βάσει ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ΓΔΖ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. Ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν ΖΓ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθέτῳ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστίν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν

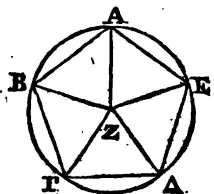
ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Η, Θ, Κ, Λ, Μ σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτὰς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμήτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς πίπτειν τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας. Ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν. Γεγράφθω ὡς ὁ ΗΘΚΛΜ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ΄.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.



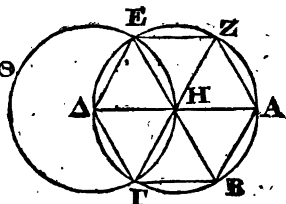
Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΖΒ, ΑΖ, ΕΖ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΖΓΔ, τῆς δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΔ ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν

σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. Περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὃ ΑΒΓΔΕ.

Περὶ ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.



Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. Ἀλλ' ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καί εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ,

ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἓξ ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον· λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒΑ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκε ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου φανερὸν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

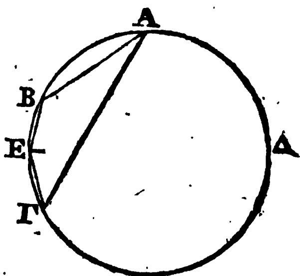
Καὶ ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἡ ΑΓ, πεντα-



γώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ· οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε· ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πεμπτὸν οὖσα τοῦ κύκλου, ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαιδέκατον ἔσται τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς ΒΕ, ΕΓ εὐθείας, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἐὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἔστι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.

EUCLI-

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUINTUS.

ΟΡΟΙ.

α΄. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β΄. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ΄. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

δ΄. Ἀναλογία δὲ, ἡ τῶν λόγων ταυτότης.

ε΄. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ς΄. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

ζ΄. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη, ἀνάλογον καλείσθω.

η΄. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολ-

λαπλασίου· τό τε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

θ'. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

ι'. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ια'. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ῃ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

ιβ'. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

ιγ'. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

ιδ'. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

ιε'. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ις'. Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιζ'. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

ιη'. Διΐσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Ἢ ἄλλως. Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ιθ'. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾖ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι.

κ'. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλό τι πρὸς ἡγούμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ παντὰ τῶν πάντων.

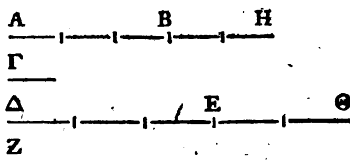
Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

A H B
E
Γ Θ Δ
Z

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Ζ. Διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Ε μεγέθη ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΒ, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΓΘ, ΘΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΑΗ, ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ· ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ ἴσα τοῖς Ε, Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.



Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ τετάρτου τοῦ Ζ, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τετάρτου τοῦ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

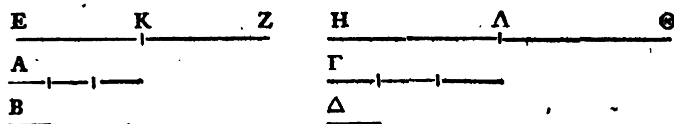
Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον το ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ ΒΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ ΑΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ· καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ διΐσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν

Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· *λέγω ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* ΕΖ *τοῦ* Β *καὶ τὸ* ΗΘ *τοῦ* Δ.



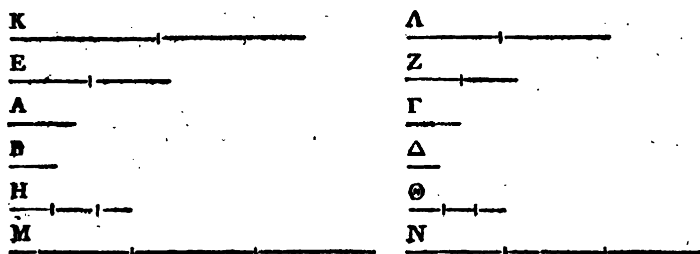
Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ *τοῦ* Α *καὶ τὸ* ΗΘ *τοῦ* Γ· *ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ* ΕΖ *ἴσα τῷ* Α, *τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ* ΗΘ *ἴσα τῷ* Γ. *Διῃρήσθω τὸ μὲν* ΕΖ *εἰς τὰ τῷ* Α *μεγέθη ἴσα τὰ* ΕΚ, ΚΖ, *τὸ δὲ* ΗΘ *εἰς τὰ τῷ* Γ *ἴσα τὰ* ΗΛ, ΛΘ· *ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν* ΕΚ, ΚΖ *τῷ πλήθει τῶν* ΗΛ, ΛΘ. *Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* Α *τοῦ* Β *καὶ τὸ* Γ *τοῦ* Δ· *ἴσον δὲ τὸ μὲν* ΕΚ *τῷ* Α, *τὸ δὲ* ΗΛ *τῷ* Γ· *ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* ΕΚ *τοῦ* Β *καὶ τὸ* ΗΛ *τοῦ* Δ. *Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* ΚΖ *τοῦ* Β *καὶ τὸ* ΛΘ *τοῦ* Δ. *Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ* ΕΚ *δευτέρου τοῦ* Β *ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ* ΗΛ *τετάρτου τοῦ* Δ· *ἐστὶ δὲ καὶ πέμπτον τὸ* ΚΖ *δευτέρου τοῦ* Β *ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ* ΛΘ *τετάρτου τοῦ* Δ· *καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ* ΕΖ *δευτέρου τοῦ* Β *ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ* ΗΘ *τετάρτου τοῦ* Δ. *Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δʹ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α *πρὸς δεύτερον τὸ* Β *τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ* Γ *πρὸς τέταρτον τὸ* Δ, *καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν* Α, Γ *ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ* Ε, Ζ, *τῶν δὲ* Β, Δ *ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ* Η, Θ· *λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ* Ε *πρὸς τὸ* Η, *οὕτως τὸ* Ζ *πρὸς τὸ* Θ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Ε, Ζ *ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ* Κ, Λ, *τῶν δὲ* Η, Θ *ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ* Μ, Ν.



Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε *τοῦ* Α, *τὸ δὲ* Ζ *τοῦ* Γ, *καὶ εἴληπται τῶν* Ε, Ζ *ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ* Κ, Λ· *ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* Κ *τοῦ* Α *καὶ τὸ* Λ *τοῦ* Γ. *Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* Μ *τοῦ* Β *καὶ τὸ* Ν *τοῦ* Δ. *Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ* Α *πρὸς τὸ* Β *οὕτως τὸ* Γ *πρὸς τὸ* Δ, *καὶ εἴληπται τῶν μὲν* Α, Γ *ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ* Κ, Λ, *τῶν δὲ* Β, Δ *ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ* Μ, Ν· *εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ* Κ *τοῦ* Μ, *ὑπερέχει καὶ τὸ* Λ *τοῦ* Ν· *καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν* Κ, Λ *τῶν* Ε, Ζ *ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ* Μ, Ν *τῶν* Η, Θ *ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ* Ε *πρὸς τὸ* Η, *οὕτως τὸ* Ζ *πρὸς τὸ* Θ. *Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι, εἰ ὑπερέχει τὸ Κ *τοῦ* Μ, *ὑπερέχει καὶ τὸ* Λ *τοῦ* Ν· *καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ* Μ *τοῦ* Κ, *ὑπερέχει καὶ τὸ* Ν *τοῦ* Λ· *καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἔσται καὶ ὡς τὸ* Η *πρὸς τὸ* Ε, *οὕτως τὸ* Θ *πρὸς τὸ* Ζ. *Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.*

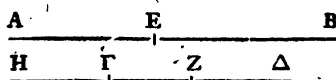
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ *μεγέθους τοῦ* ΓΔ *ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ* ΑΕ *ἀφαιρεθέντος τοῦ* ΓΖ· *λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ* ΕΒ *λοιποῦ τοῦ* ΖΔ *ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ* ΑΒ *ὅλου τοῦ* ΓΔ.

Ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ *τοῦ* ΓΖ, *τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ* ΕΒ *τοῦ* ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ *τοῦ* ΓΖ *καὶ τὸ* ΕΒ *τοῦ* ΗΓ· *ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* ΑΕ *τοῦ* ΓΖ *καὶ τὸ* ΑΒ *τοῦ* ΗΖ· *κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ* ΑΕ *τοῦ* ΓΖ *καὶ τὸ* ΑΒ *τοῦ* ΓΔ· *ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον*

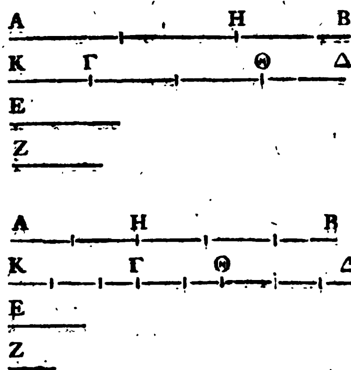


τὸ ΑΒ *ἑκατέρου τῶν* ΗΖ, ΓΔ· *ἴσον ἄρα τὸ* ΗΖ *τῷ* ΓΔ· *κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ* ΓΖ· *λοιπὸν ἄρα τὸ* ΗΓ *λοιπῷ τῷ* ΔΖ *ἴσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* ΑΕ *τοῦ* ΓΖ *καὶ τὸ* ΕΒ *τοῦ* ΗΓ, *ἴσον δὲ τῷ* ΗΓ *τὸ* ΔΖ· *ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* ΑΕ *τοῦ* ΓΖ *καὶ τὸ* ΕΒ *τοῦ* ΖΔ. *Ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ* ΑΕ *τοῦ* ΓΖ *καὶ τὸ* ΑΒ *τοῦ* ΓΔ· *ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* ΕΒ *τοῦ* ΖΔ *καὶ τὸ* ΑΒ *τοῦ* ΓΔ· *καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ* ΕΒ *λοιποῦ τοῦ* ΖΔ *ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ* ΑΒ *ὅλου τοῦ* ΓΔ. *Ἐὰν ἄρα μέγεθος, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ΄.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τ[ῶν] αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τ[ο]ῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ AB, ΓΔ *δύο μεγεθῶν τῶν* E, Z *ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ* AH, ΓΘ *τῶν*



αὐτῶν τῶν E, Z *ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ* HB, ΘΔ *τοῖς* E, Z *ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.*

Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ HB *τῷ* E *ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ* ΘΔ *τῷ* Z *ἴσον ἐστί. Κείσθω γὰρ τῷ* Z *ἴσον τὸ* ΓK.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AH *τοῦ* E, *καὶ τὸ* ΓΘ *τοῦ* Z, *ἴσον δὲ τὸ μὲν* HB *τῷ* E, *τὸ δὲ* KΓ *τῷ* Z· *ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* AB *τοῦ* E *καὶ τὸ* KΘ *τοῦ* Z. *Ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ* AB *τοῦ* E, *καὶ τὸ* ΓΔ *τοῦ* Z· *ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* KΘ *τοῦ* Z, *καὶ τὸ* ΓΔ *τοῦ* Z. *Ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῆς* KΘ, ΓΔ *τοῦ* Z *ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ* KΘ *τῷ* ΓΔ. *Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ* ΓΘ· *λοιπὸν ἄρα τὸ* KΓ *λοιπῷ τῷ* ΘΔ *ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τῷ* Z *τὸ* KΓ *ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ* ΘΔ *ἄρα τῷ* Z *ἴσον ἐστίν. Ὥστε εἰ τὸ* HB *τῷ* E *ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ* ΘΔ *ἴσον ἔσται τῷ* Z.

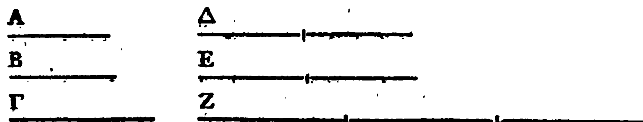
Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ HB *τοῦ* E, *τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ* ΘΔ *τοῦ* Z. *Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι ὃ ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ Ζ.



Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. Ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

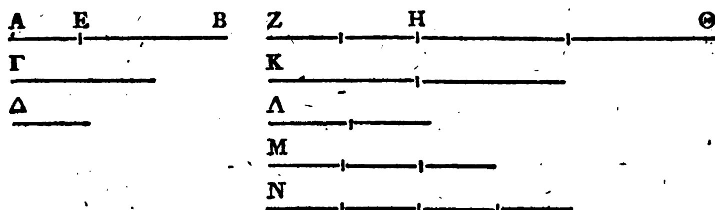
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε· ἄλλο δέ τι τὸ Ζ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει τὸ Ζ καὶ τοῦ Ε· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Τὰ ἴσα ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΕ, τὸ δὴ ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται



ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. Ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ ἔλαττον τοῦ ΕΒ, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ ΑΕ, καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσανταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον ἕως οὗ τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ.

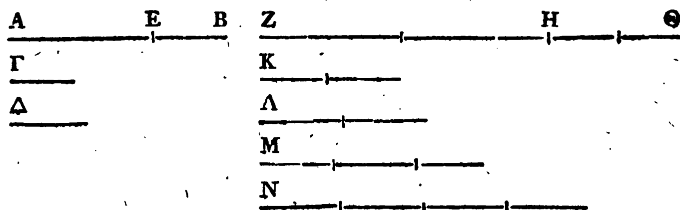
Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. Ἰσάκις δὲ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. Ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Κ τῷ ΗΘ. Τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστι. Μεῖζον δὲ τὸ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν. Ἀλλὰ συναμφότερα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστὶν ἴσα· ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστι, συναμφότερα δὲ τὰ Δ, Μ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ἔστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια,

τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ἔστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον ἔστω· τὸ δὴ ἔλαττον τὸ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μεῖζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ Ν πολλα-



πλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ μὴ ἔλασσον εἶναι, μεῖζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ τουτέστι τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ ΗΘ, τουτέστι τὸ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν. Τῶν ἄρα ἀνίσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θʹ.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Α
Β
Γ

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι΄.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγων ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

Ἐχέτω γάρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β.

Α
Β
Γ

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β, ἢ ἔλασσον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β, τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ τὸν ἐλάσσονα εἶχε λόγον ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ μεῖζον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Β τῷ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οὐ δὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ πρὸς τὸ Α. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ

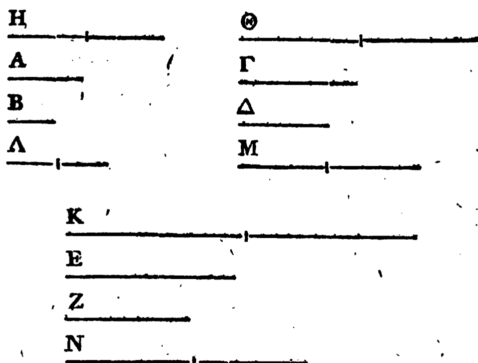
ἴσον, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α. Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἔστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.



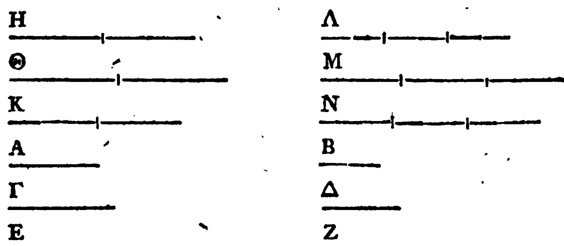
Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ

Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἔστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Β, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

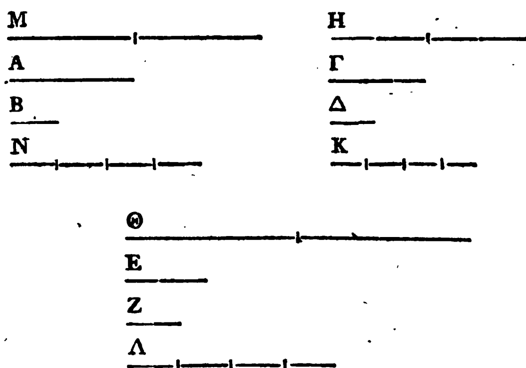
Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὥςτε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἐλάσσονα. Καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια· ἐπειδήπερ ἂν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσια, ὁσαπλασιόν ἐστι ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, το-

σαυτaπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Λ καὶ τὰ Λ, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον μὲν γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸ ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ πέμπτον



τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλα-

πλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥςτε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιόν ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α· ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. Τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἔστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Α

Β

Γ

Δ

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Β τοῦ Δ μεῖζόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε μέγεθος τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ἔλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥςτε μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Δ.

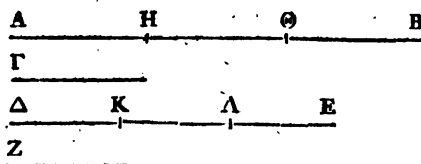
Ὁμοί-

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ· κἂν ἔλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται, καὶ τὸ Β τοῦ Δ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε΄.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Ἔστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

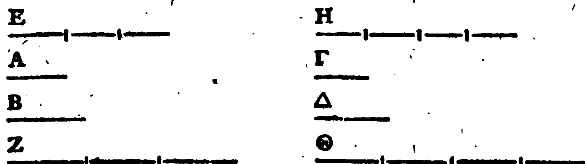


Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθη ἴσα, τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Τὰ ἄρα μέρη, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἐστὶν, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

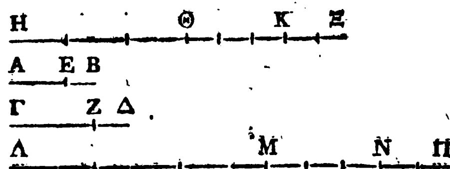
Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω ὅτι

καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ· τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ΚΞ, ΝΠ.

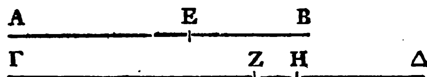
Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. Ἰσάκις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. Ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. Ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥςτε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΝΠ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν ΗΘ, ΛΜ

τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Ἐὰν ἄρα συγκείμενα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.



Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ, ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΔΖ, ἢ πρὸς μεῖζον.

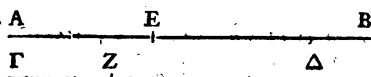
Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ ΔΗ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΔ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα. Ἐὰν ἄρα διῃρημένα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ



διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΓ· καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. Ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς ΓΖ οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν ΔΖ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα ᾖ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, καί ἐστιν ἀναστρέψαντι. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ΄.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, διΐσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· καὶ ἐὰν ἴσον, ἴσον· καὶ ἐὰν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β

πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, διΐσου δὲ μεῖζον ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Α Δ
Β Ε
Γ Ζ

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β, τὸ δὲ μεῖζων πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. Τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστι· μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Ἐὰν ἄρα ᾖ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, διΐσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ

Α Δ
Β Ε
Γ Ζ

λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, διΐσου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζον ἔστω·

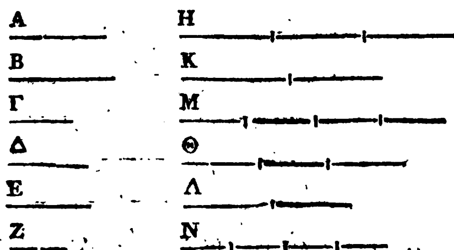
λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μεῖζόν ἐστιν ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπάσια τὰ Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Ν. Ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Κ, Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος Θ, Λ, Ν σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· διΐσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ΄.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α

Α Η
Β Θ
Γ Λ
Δ Κ
Ε Μ
Ζ Ν

πρὸς τὸ Β οὕτως τὰ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὰ Ε· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

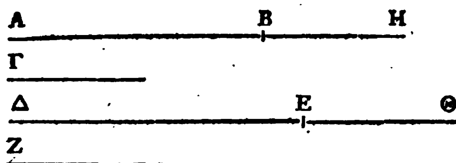
Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ Η, Θ τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· ἀλλ᾽ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. Ἐδείχθη δὴ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ, τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Κ, Μ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία· διίσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Πρῶτον μὲν γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· ἐχέτω

δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.

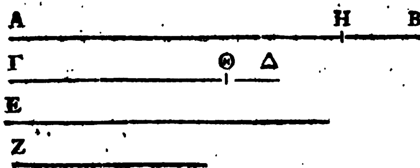


Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. Καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, Ζ τῶν ΓΔ, Ε μείζονά ἐστιν.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴσον τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Μεῖζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ, Ε. Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προςθετῇ, τὰ ὅλα ανισα ἐστίν· ἐὰν ἄρα τῶν ΗΒ, ΘΔ ἀνίσων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ, τῷ μὲν ΗΒ προςτεθῇ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προςτεθῇ τὰ ΓΘ, Ε, συνάγεται τὰ ΑΒ, Ζ μείζονα τῶν ΓΔ, Ε. Ἐὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

ὍΡΟΙ.

α΄. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β΄. Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγων ὦσιν.

γ΄. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

δ΄. Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

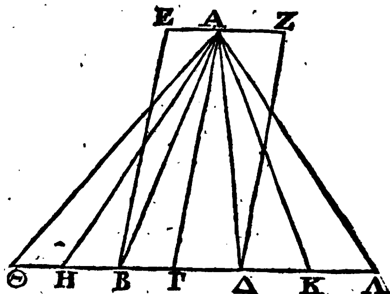
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγομένην· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΓΛ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΛΓ τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἥτε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον· τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, ἥτε ΓΛ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλάττων, ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.



Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν λόγον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς ἡ μὲν ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ

ΑΓΔ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸν ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

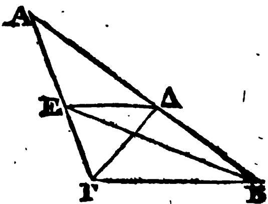
ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ. Ἄλλο δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην, πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.



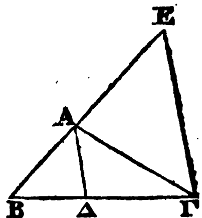
Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, ὡς δὲ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. Ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καὶ εἴσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. Τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστί. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ΄.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ

ΑΓΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστὶν ἴση· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. Ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

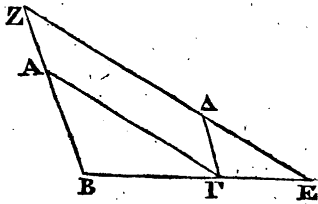
Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἄλλα καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἐστὶν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται παράλληλος ἡ ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ, ὥςτε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση. Ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.



Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ

ΑΒΓ,

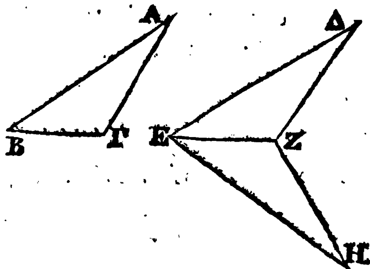
ΑΒΓ, ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ ΒΑ, ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΖΕ ἦκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ. Ἴση δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ διίσου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ. Τῶν ἄρα ἰσογωνίων, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον



τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

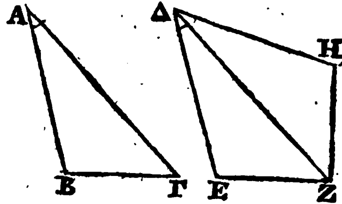
Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Ε, Ζ, τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Α λοιπῇ πρὸς τῷ Η ἐστὶν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ· τῶν ἄρα ΑΒΓ, ΕΗΖ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἑκάτερα ἄρα τῶν ΔΕ, ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΗΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστὶν ἴση. Καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ τῇ ὑπὸ ΖΕΗ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ Α πρὸς τῷ Δ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἕξει τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.



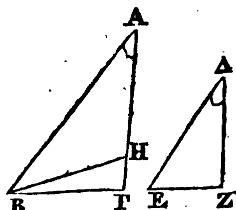
Συνεστάτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ ΔΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ, ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΗ.

Λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσ-

σονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογον εἰσιν αἱ πλευραί.



Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ ὑπόκειται οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἐστὶν ἴση. Ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

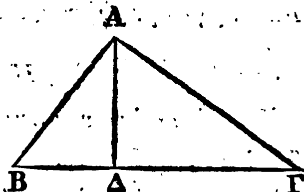
Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστίν. Οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ. Τριγώνου δὴ τοῦ ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦτε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ, τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου· καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, κοινὴν τῶν δύο τριγώνων· τὸ ΑΒΓ ἄρα τρί-

γώνου τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τε ἐστὶ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ, πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ Β· καὶ ἔτι ἡ ΒΑ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

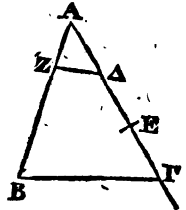
ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τὶς εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΓ, γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ τυχοῦσαν·

καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ.



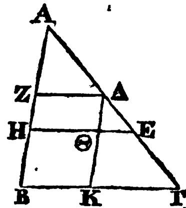
Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ ΑΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη ἡ ΑΓ, κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥςτε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, καὶ διὰ τῶν Δ, Ε τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΚ.

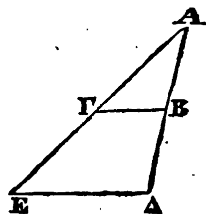


Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΘΒ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΘ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΚΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘΕ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ τῇ ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΗ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἐστὶν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.



Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

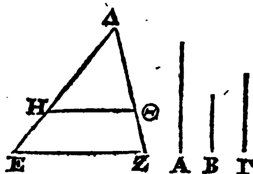
Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ, τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρεται ἡ ΓΕ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.



Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΕ, ΔΖ, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ, παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ

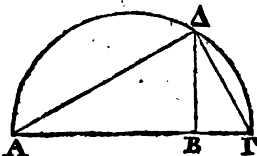
ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ, τετάρτη ἀνάλογον προσεύρεται ἡ ΘΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.



Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ· ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

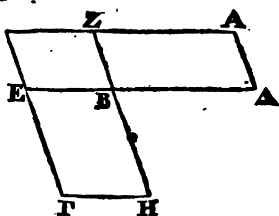
Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέση ἀνάλογον προσεύρεται ἡ ΒΔ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ, ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ

τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. Τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

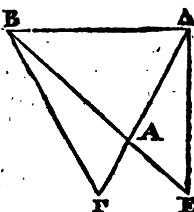
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς το ΖΕ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ οὕτως τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς

ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.



Κείσθω γὰρ ὥςτε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, ἄλλο δὲ τὸ ΑΒΔ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΑΒ τρίγωνον πρὸς ΒΑΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. Ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

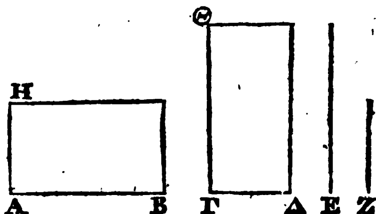
Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις΄.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB, ΓΔ, E, Z· ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῆς A, Γ σημείων ταῖς AB, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ AH, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Z ἴση ἡ AH, τῇ δὲ E ἴση ἡ ΓΘ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ BH, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z, ἴση δὲ ἡ μὲν E τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Z τῇ AH· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν AH· τῶν BH, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ BH παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν BH τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z, ἴση γὰρ ἡ AH τῇ Z· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ E· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, Z τὸ BH, ἴση γάρ ἐστιν ἡ AH τῇ Z· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E τὸ ΔΘ, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ E· τὸ ἄρα BH ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ· καὶ ἔστιν ἰσογώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν AH· ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ E, ἡ δὲ AH

τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

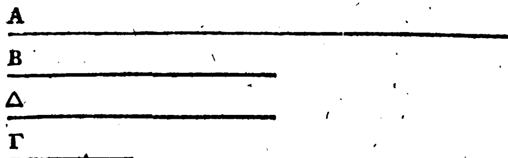
Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.



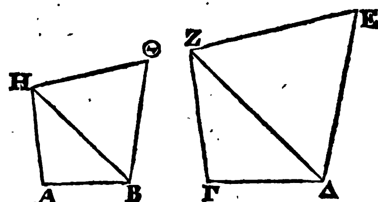
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Β, Δ. Ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσων ᾖ τῷ

ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ. Ἐὰν ἄρα τρεῖς, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.



Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Α, Β τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. Πάλιν, συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἥ τε ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστὶν ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ

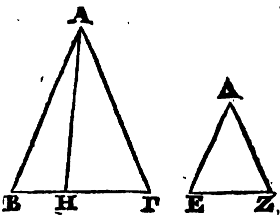
Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῷ πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ΓΕ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ ΑΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὧν δὲ, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ

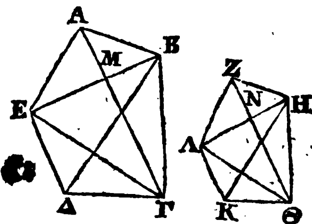
ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.



Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ· καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΖΛ. Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ

ἴσην

ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, ὥςτε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. Ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμσιότητα τῶν πολυγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ, ὥςτε καὶ ὅμοιον ἔτι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν, ὥςτε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ· ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς ΝΘ: ὥςτε καὶ διΐσου, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ.

Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΜ τρίγωνον πρὸς ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς ΕΜΓ, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. Ἀλλ' ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΛ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρός τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴ ΖΗ ὁμόλογον πλευράν. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ α'.

Ὡσαύτως δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

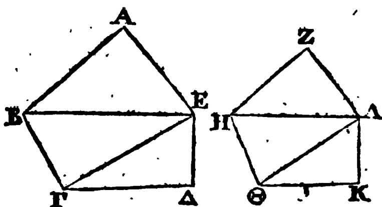
Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ, ΖΗ *τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν* Ξ, *ἡ* ΑΒ *πρὸς τὴν* Ξ *διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* ΑΒ *πρὸς τὴν* ΖΗ. *Ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἡ* ΑΒ *πρὸς* ΖΗ· *ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.*

ΑΛΛΩΣ.

Δείξομεν δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ *πολύγωνα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ* ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ· *λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ* ΑΒΕ *τρίγωνον πρὸς τὸ* ΖΗΛ *οὕτως τὸ* ΕΒΓ *πρὸς τὸ* ΛΗΘ *καὶ τὸ* ΓΔΕ *πρὸς τὸ* ΘΚΛ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΕ *τρίγωνον τῷ* ΖΗΛ *τριγώνῳ, τὸ* ΑΒΕ *ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ* ΖΗΛ *διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* ΒΕ *πρὸς τὴν* ΗΛ. *Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ* ΒΕΓ *τρίγωνον πρὸς τὸ* ΗΛΘ *τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* ΒΕ *πρὸς τὴν* ΗΛ· *ἔστιν ἄρα ὡς τὸ* ΑΒΕ *τρίγωνον πρὸς τὸ* ΖΗΛ *τρίγωνον οὕτως τὸ* ΕΒΓ *πρὸς τὸ* ΛΗΘ. *Πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ* ΕΒΓ *τρίγωνον τῷ* ΛΗΘ *τριγώνῳ· τὸ* ΕΒΓ *ἄρα πρὸς τὸ* ΛΗΘ *διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* ΓΕ *εὐθεῖα πρὸς τὴν* ΘΛ. *Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ* ΕΓΔ *τρίγωνον πρὸς τὸ* ΛΘΚ *τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* ΓΕ *πρὸς τὴν* ΘΛ· *ἔστιν ἄρα ὡς τὸ* ΕΒΓ *τρίγωνον πρὸς τὸ* ΛΗΘ *οὕτως τὸ* ΕΓΔ *πρὸς τὸ* ΛΘΚ. *Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ* ΕΒΓ *πρὸς τὸ* ΛΗΘ *οὕτως τὸ* ΑΒΕ *πρὸς τὸ* ΖΗΛ· *καὶ ὡς ἄρα τὸ* ΑΒΕ *πρὸς*

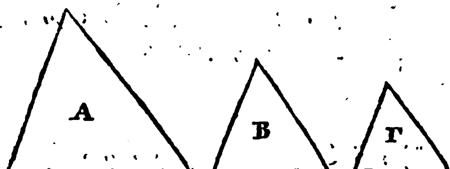


τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶν ὅμοιον.



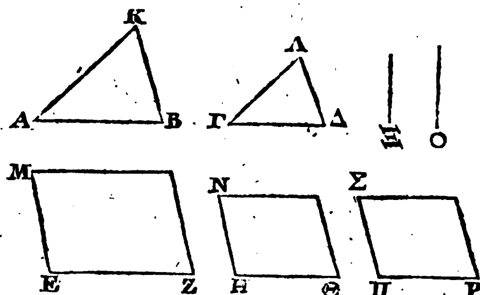
Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τε ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὗται αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ, ΝΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ *τρίτη ἀνάλογον ἡ* Ξ, *τῶν δὲ* ΕΖ, ΗΘ *τρίτη ἀνάλογον ἡ* Ο. *Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ἡ* ΑΒ *πρὸς τὴν* ΓΔ *οὕτως ἡ* ΕΖ *πρὸς τὴν* ΗΘ, *ὡς δὲ* ΓΔ



πρὸς τὴν Ξ *οὕτως ἡ* ΗΘ *πρὸς τὴν* Ο· *διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ* ΑΒ *πρὸς τὴν* Ξ *οὕτως ἡ* ΕΖ *πρὸς τὴν* Ο. *Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ* ΑΒ *πρὸς τὴν* Ξ *οὕτως τὸ* ΚΑΒ *πρὸς τὸ* ΛΓΔ, *ὡς δὲ ἡ* ΕΖ *πρὸς τὴν* Ο *οὕτως τὸ* ΜΖ *πρὸς τὸ* ΝΘ· *καὶ ὡς ἄρα τὸ* ΚΑΒ *πρὸς τὸ* ΛΓΔ *οὕτως τὸ* ΜΖ *πρὸς τὸ* ΝΘ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ *πρὸς τὸ* ΛΓΔ *οὕτως τὸ* ΜΖ *πρὸς τὸ* ΝΘ· *λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ* ΑΒ *πρὸς τὴν* ΓΔ *οὕτως ἡ* ΕΖ *πρὸς τὴν* ΗΘ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ *πρὸς τὴν* ΓΔ *οὕτως* ΕΖ *πρὸς τὴν* ΗΘ, *ἔστω ὡς ἡ* ΑΒ *πρὸς τὴν* ΓΔ *οὕτως ἡ* ΕΖ *πρὸς τὴν* ΠΡ, *καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς* ΠΡ *ὁποτέρῳ τῶν* ΜΖ, ΝΘ *ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ* ΣΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ *πρὸς τὴν* ΓΔ *οὕτως ἡ* ΕΖ *πρὸς τὴν* ΠΡ, *καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν* ΑΒ, ΓΔ *ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ* ΚΑΒ, ΛΓΔ, *ἀπὸ δὲ τῶν* ΕΖ, ΠΡ *ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ* ΜΖ, ΣΡ· *ἔστιν ἄρα ὡς τὸ* ΚΑΒ *πρὸς τὸ* ΛΓΔ *οὕτως τὸ* ΜΖ *πρὸς τὸ* ΣΡ. *Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ* ΚΑΒ *πρὸς τὸ* ΛΓΔ *οὕτως τὸ* ΜΖ *πρὸς τὸ* ΝΘ· *καὶ ὡς ἄρα τὸ* ΜΖ *πρὸς τὸ* ΣΡ *οὕτως τὸ* ΜΖ *πρὸς τὸ* ΝΘ· *τὸ* ΜΖ *ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν* ΝΘ, ΣΡ *τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ* ΝΘ *τῷ* ΣΡ. *Ἔστι δὲ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ* ΗΘ *τῇ* ΠΡ. *Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ* ΑΒ *πρὸς τὴν* ΓΔ *οὕτως ἡ* ΕΖ *πρὸς τὴν* ΠΡ, *ἴση δὲ ἡ* ΠΡ *τῇ* ΗΘ· *ἔστιν ἄρα ὡς ἡ* ΑΒ *πρὸς τὴν* ΓΔ *οὕτως ἡ* ΕΖ *πρὸς τὴν* ΗΘ. *Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ᾖ καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δείξομεν οὕτως.

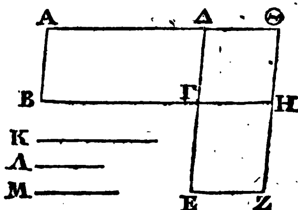
Ἔστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Εἰ γὰρ ἄνισοί εἰσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. Μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥςτε καὶ τὸ ΡΣ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΠΡ τῆς ΗΘ, ἴση ἄρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ΄.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ, ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τοῦ τε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.



Κείσθω γὰρ ὥςτε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ· καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

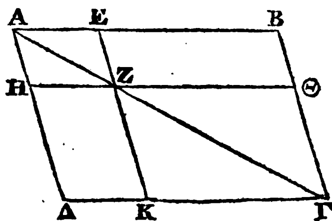
Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἀλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ· ὥςτε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον

ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ· ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ· ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὴν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Τὰ ἄρα ἰσογώνια, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.



Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως

ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συντεθέντι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΓΒ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστιν· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

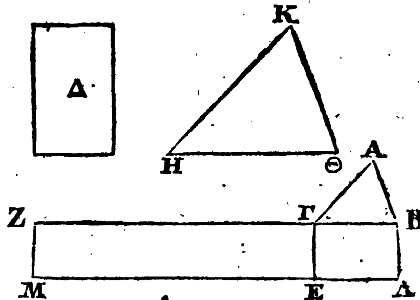
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ Δ· δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον

παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ,



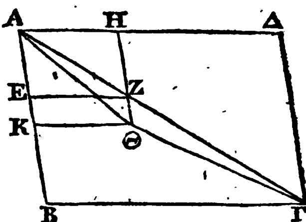
ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΕΜ. Καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. Ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. Ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστὶν ἴσον. Ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον· τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνίσταται τὸ ΚΗΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως

κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.



Ἀπὸ παραλληλογράμμου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ ΑΕΖΗ, ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΕΖΗ.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔστω αὐτοῦ ἡ διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ.

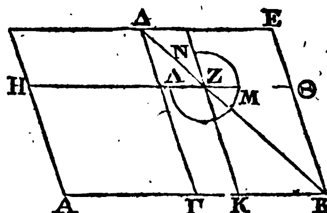
Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ, καὶ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐκ ἐστὶ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΗ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΕΖΗ παραλληλογράμμῳ. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν αὐτὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΓΕ,

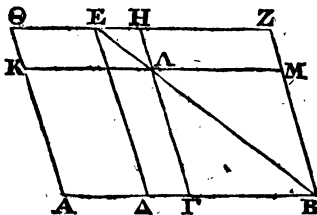
ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, τουτέστι τῆς ΓΒ· λέγω ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΓΕ μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΚΘ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΓΕ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.



Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. Ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν· καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΛΜΝ γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

Ἔστω γὰρ πάλιν ἡ ΑΒ τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβληθὲν τὸ ΑΛ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΓΜ, καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν ΑΒ τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον τῷ ΔΖ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, τῷ ΓΜ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ ΑΛ τοῦ ΑΕ.



Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔΖ τῷ ΓΜ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

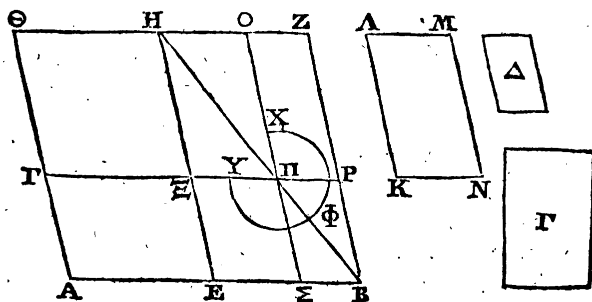
Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΖ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ΛΖ τοῦ ΚΕ. Ἴσον δὲ τὸ ΛΖ τῷ ΔΛ· μεῖζον

ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΕΚ. *Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΔ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΛ ὅλου τοῦ ΑΕ μεῖζόν ἐστιν. Πάντων ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, μὴ



μεῖζον ὂν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΕΒΖΗ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον· τὸ δὴ ΑΗ ἤτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ, ἢ μεῖζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ὁρισμόν. Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν

AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΗ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΕΖ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. Εἰ δὲ οὔ, μεῖζόν ἐστι τὸ ΘΕ τοῦ Γ. Ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. Ὧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. Ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἐστὶν ὅμοιον. Ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΛΚ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. Κείσθω τῇ μὲν ΚΛ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΚΜ τὸ ΗΠ. Ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστι· καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ ΗΠ τῷ ΚΜ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΦΧ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προςκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΤΦΧ γνώμονι ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ ὁ ΤΦΧ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ ΑΠ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΣΤ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπειδήπερ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὅμοιόν ἐστιν. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβαλεῖν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.

Ζ Λ Μ Κ Θ Δ Φ Γ Α Ε Ψ Β Ο Χ Ν Π Ξ Η

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς ΒΖ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΗΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ. Ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. Ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΛΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. Ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΛ ὅμοιόν ἐστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. Ἤχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστί. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἐστὶν ἴσος. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτέστι τῷ ΛΟ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. Ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστί· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ

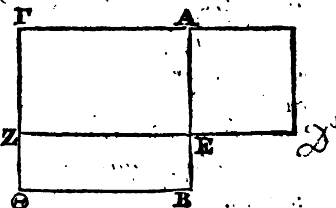
ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον τὸ ΟΠ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῷ ΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, ὑπερβάλλον εἴδει τὸ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ.

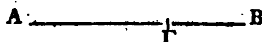


Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΖ λοιπῷ τῷ ΑΔ ἐστὶν ἴσον. Ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΖ, ΑΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΓ, τουτέστι τε ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ ΑΕ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.



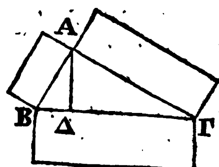
Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἡ ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα΄.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.



Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ, ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ· τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. Ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἐν ἄρα τοῖς, καὶ τὰ ἑξῆς.

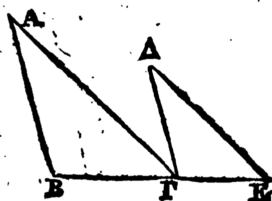
ΑΛΛΩΣ.

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἄρα εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος οὕτως τὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον· ὥςτε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδη οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα. Ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥςτε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.



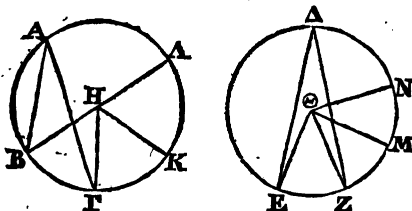
Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥςτε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ

ΓΔΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστί. Κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς Η, Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν



οὕτως ἥτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν ΒΓ περιφερείᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἑξῆς ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΓΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΖ περιφερείᾳ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΖΜ, ΜΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

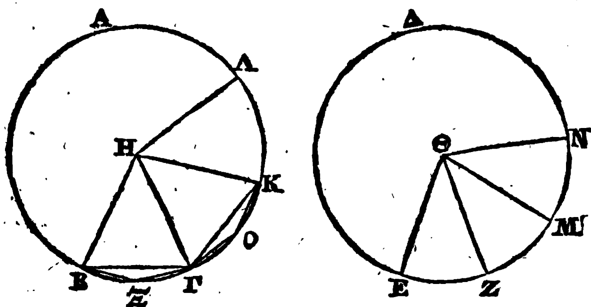
Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΒΓ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΖ. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΛ τῇ ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ γωνίας· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπο ΒΗΓ, ΕΘΖ, εἴληπται τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΒΗΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων, ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΕΘΖ γωνίας, ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ ἴση, ἴση· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἔστιν ἄρα ὡς ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ, διπλασίων γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἥτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λέγω ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ, Ο σημείων, ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφερείᾳ, καὶ η λοιπὴ ἡ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερείᾳ· ὥστε καὶ γωνία



ἡ ὑπὸ ΒΞΓ τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἐστὶν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομεὺς ὅλῳ τῷ ΗΓΚ τομεῖ ἴσος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΛ τομεὺς ἑκατέρῳ τῶν ΗΚΓ, ΗΓΒ ἴσος ἐστίν, οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς οἱ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΗΒΓ τομέως. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομεὺς τοῦ ΘΕΖ τομέως. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τῷ ΘΕΝ τομεῖ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν ΒΓ, ΕΖ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ, ΘΕΖ τομέων, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ

τοῦ ΗΒΓ τομέως, ἥτε ΒΛ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομέως ἰσάκις πολλαπλάσια, ἥτε ΕΝ περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ τομεύς. Καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

ὍΡΟΙ.

αʹ. ΣΤΕΡΕΟΝ ἐστι, τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

βʹ. Στερεοῦ δὲ πέρας, ἐπιφάνεια.

γʹ. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δʹ. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

εʹ. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

ϛʹ. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

ζʹ. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ

εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

η'. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

θ'. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

ι'. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

ια'. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν ἡ πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. ΑΛΛΩΣ. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

ιβ'. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

ιγ'. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

ιδ'. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ιε'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

ις'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ιη'. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ

περιληφθὲν σχῆμα. Κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ἢ τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος· ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος· ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ιθ'. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

κ'. Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.

κα'. Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

κβ'. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

κγ'. Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

κδ'. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσι.

κε'. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

κϛ'. Τετράεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν τεττάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

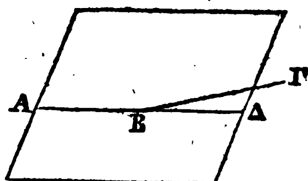
κζ'. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κη'. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

κθ'. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ.



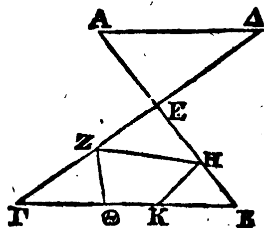
Εἰ γὰρ δυνατὸν, εὐθείας γράμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ.

Ἔσται δή τις τῇ ΑΒ συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Ἔστω ἡ ΒΔ· δύο δὴ δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον· εὐθεῖα γὰρ εὐθείᾳ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ᾽ ἕν· εἰ δὲ μὴ, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εὐθείας ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐστιν ἐπιπέδῳ.



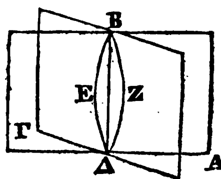
Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐν ἑνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν ΕΓ, ΕΒ τυχόντα σημεῖα, τὰ Ζ, Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΘ, ΗΚ· λέγω πρῶτον ὅτι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Εἰ γάρ ἐστι τοῦ ΕΓΒ τριγώνου μέρος ἤτοι τὸ ΖΓΘ, ἢ τὸ ΗΒΚ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. Εἰ δὲ τοῦ ΕΓΒ τριγώνου τὸ ΖΓΒΗ μέρος ᾖ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· τὸ ἄρα ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Ἐν ᾧ δέ ἐστι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΓ,

ΕΒ· ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ, ἐν τούτῳ καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ· αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστι.



Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τεμνέτω ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΒ γραμμή· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β, ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΕΒ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΖΒ· ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν ΔΕΒ, ΔΖΒ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ εὐθεῖαί εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τὶς, ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη, εὐθεῖα ἔσται, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

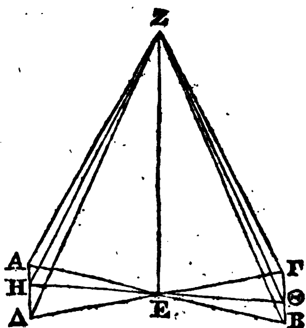
ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΕΖ δύο εὐθείαις ταῖς ΑΒ, ΓΔ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ

ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· ὥςτε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΕΘ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΗΕ, ΒΕΘ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΑΕ τῇ ΕΒ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΑΗ τῇ ΒΘ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΕ, βάσις ἄρα ἡ ΖΑ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΔ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. Καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΘ ἴσαι εἰσί. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΑΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΖΒΘ· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσί. Καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΕΖ, ΘΕΖ γωνιῶν· ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ Ε ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΖΕ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας· ἡ ΖΕ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ εὐθειῶν· ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

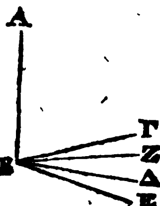


Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB *τρισὶν εὐθείαις ταῖς* BΓ, BΔ, BE *πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ* B *ἀφῆς ἐφεστάτω· λέγω ὅτι αἱ* BΓ, BΔ, BE *ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.*



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔστωσαν αἱ μὲν BΔ, BE *ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ* BΓ *ἐν μετεωροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν* AB, BΓ *ἐπίπεδον· κοινὴν δὴ τομὴν ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω τὴν* BZ. *Ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν* AB, BΓ *αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ* AB, BΓ, BZ. *Καὶ ἐπεὶ ἡ* AB *ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν* BΔ, BE· *καὶ τῷ διὰ τῶν* BΔ, BE *ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ* AB. *Τὸ δὲ διὰ τῶν* BΔ, BE *ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ* AB *ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ* AB. *Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ* BZ *οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ* ABZ *γωνία ὀρθή ἐστιν. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ* ABΓ *ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ* ABZ *γωνία τῇ ὑπὸ* ABΓ. *Καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ* BΓ *εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ* BΓ, BΔ, BE *ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.*

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ *τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ* AB *τῇ* ΓΔ.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ B, Δ *σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ* BΔ *εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ* BΔ

πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ, ΒΕ, οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΔΕ ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθή· ὁ ΕΔ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ἁφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ, ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ, πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΓΔΒ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

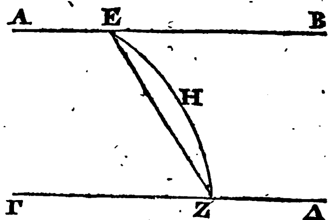
Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ· λέγω

ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.



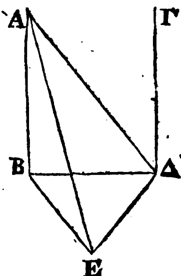
Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει ἐν ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΒ, ΓΔ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ· καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.



Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ ἄρα ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ εἰς

παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΓΔΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΒ· ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΔ ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΒ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΑΔ· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΑΔ ὀρθή ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν ΔΒ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΕΔ. Ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΑΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ ΔΓ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ. Ἐν ᾧ δὲ ΑΒ, ΒΔ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ· ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΔΓ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥςτε καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΒΔ· ἡ ΓΔ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς ΔΕ, ΔΒ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥςτε καὶ ἡ ΓΔ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι: τὸ δὲ διὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ, ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΓΔ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

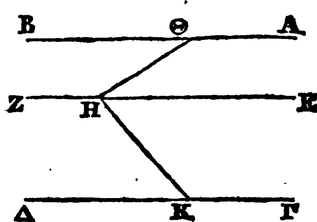
ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος, μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΘ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΖΕ, ΓΔ τῇ ΕΖ πά-

λιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΗΚ ὀρθή ἐστιν, ἡ ΕΖ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Καί ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ παράλληλος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῷ διὰ τῶν Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῷ διὰ τῶν Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῷ διὰ τῶν Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

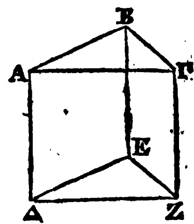


ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας γωνίας περιέξουσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΕ, ΕΖ ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῇ ΕΔ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ καὶ ἴση. Καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ, ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσί,

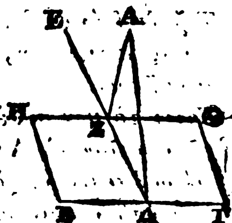


εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ δοθὲν ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ὡς ἔτυχεν ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι, καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΑ, ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ ΒΓ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ ΗΘ. Ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΘ. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΗΘ. Ἔστι δὲ ἡ ΑΖ καὶ πρὸς τὴν ΔΕ ὀρθή· ἡ ΑΖ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΕ ὀρθή ἐστιν. Ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ ΖΑ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ

ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ ΑΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

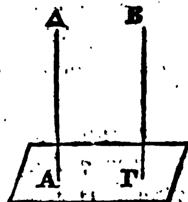
Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου μετεώρου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ Α· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Νενοήσθω μετέωρόν τι σημεῖον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ.



Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

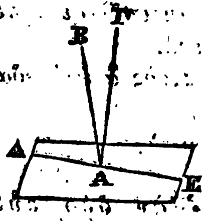
Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταταί ἡ ΑΔ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον, τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω τὴν ΔΑΕ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ

τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, καί εἰσιν ἐν τῷ ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.



Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.



Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. Συμπιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν. Ποιείτωσαν τὴν ΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΘ τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΒΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν ΒΚ ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ ΕΖ ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΚ γωνία ὀρθή ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ ὀρθή ἐστι, τριγώνου δὴ τοῦ ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΚ, ΒΑΚ δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα

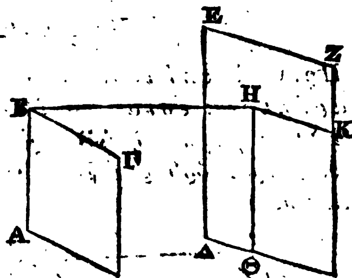
συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· λέγω ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΒΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ μὲν ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, τῇ δὲ ΕΖ ἡ ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΒΗΚ γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΑ τῇ ΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΗΒΑ, ΒΗΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΑ· ἡ ΗΒ ἄρα τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῇ ΒΓ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΗ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΒΑ, ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ἡ ΒΗ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπίπε-

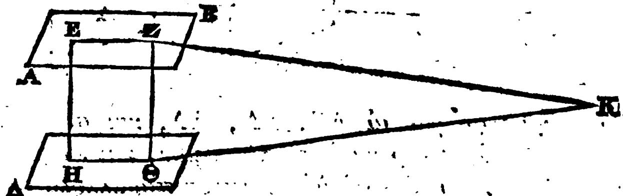
δὸν ἔσται τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐδείχθη δὲ ἡ ΗΒ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· ἔστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι. Πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.



Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΕΖ, ΗΘ, ἤτοι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν πρότερον κατὰ τὸ Κ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· Ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημεῖόν ἐστι τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. Οὐ συμπίπτουσι δέ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη συμπεσοῦνται. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε, Η μέρη ἐκ-

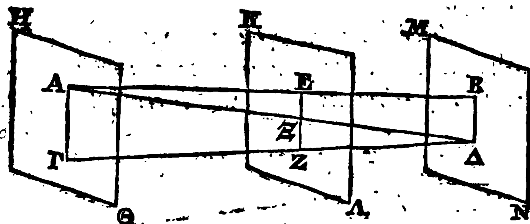
βαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Ε, Β, Γ, Ζ, Δ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ, καὶ συμβαλλέτω ἡ ΑΔ τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ. Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΚΛ, ΜΝ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΞ, ΒΔ παράλληλοί εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΗΘ, ΚΛ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ, ΞΖ παράλληλοί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΔ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΕΞ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ. Πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΞΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ.

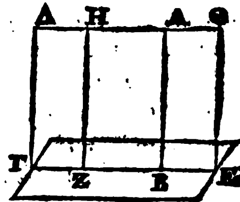
Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς AB ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς AB ἐπίπεδον τὸ ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔΕ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ ΓΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Z, καὶ ἀπὸ τοῦ Z τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ZH. Καὶ ἐπεὶ ἡ AB πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ AB· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΓΕ ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ABZ γωνία ὀρθή ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ HZB ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ ZH. Ἡ δὲ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ HZ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ ΓΕ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ZH ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς AB ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.



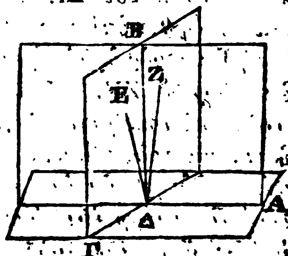
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ *τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ* ΒΔ· *λέγω ὅτι ἡ* ΒΔ *τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.*

Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ *σημείου ἐν μὲν τῷ* ΑΒ *ἐπιπέδῳ τῇ* ΑΔ *εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ* ΔΕ, *ἐν δὲ τῷ* ΒΓ *ἐπιπέδῳ τῇ* ΓΔ *πρὸς ὀρθὰς ἡ* ΔΖ. *Καὶ ἐπεὶ τὸ* ΑΒ *ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ* ΑΔ *πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ* ΑΒ *ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ* ΔΕ· *ἡ* ΔΕ *ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ* ΔΖ *ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ* Δ *τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ* Δ *σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς, πλὴν τῆς* ΔΒ *κοινῆς τομῆς τῶν* ΑΒ, ΒΓ *ἐπιπέδων.*

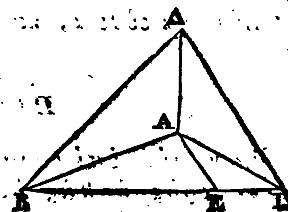


Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α *ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ* ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ *περιεχέσθω· λέγω ὅτι τῶν ὑπὸ* ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ *γωνιῶν δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.*



Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ *γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, φανερὸν ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. Εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ* ΒΑΓ, *καὶ*

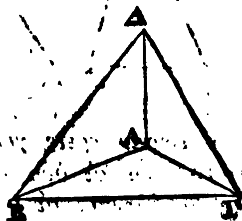
συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ τεμνέτω τὰς ΑΒ, ΑΓ εὐθείας κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, δύο δὴ ΔΑ, ΑΒ δυσὶν ΑΕ, ΑΒ ἴσαι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΒ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΒ, ΔΓ τῇ ΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ λοιπῆς τῆς ΕΓ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΑΓ μείζων ἐστίν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζονές εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα στερεά, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ, λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.



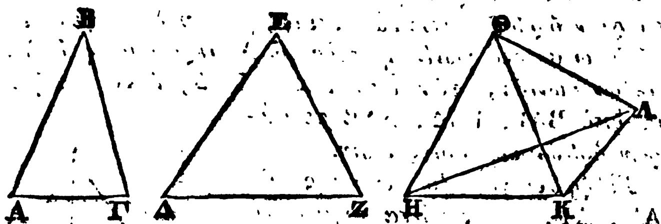
Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ, ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσιν. Αἱ δὲ ὑπὸ ΓΔΑ, ΑΔΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ μείζονές εἰσιν· αἱ ἕξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ

ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ἓξ αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΔΑΓ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσι μείζονες· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τρεῖς γωνίαι περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Ἅπασα ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι· δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.



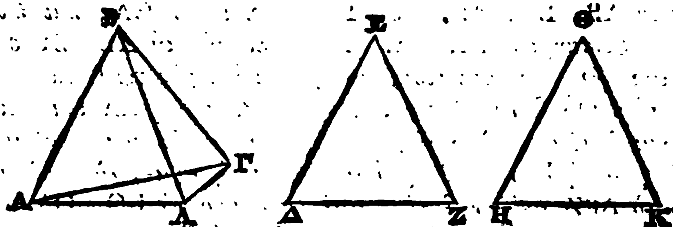
Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δ' ὑπὸ ΔΕΖ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, φανερὸν ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσων γενομένων δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΚ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΛ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΗΛ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΛ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΗΛ βάσεως τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΚΛ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΓ· αἱ ΑΓ, ΗΚ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΖ τῆς ΗΚ μείζονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ, καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. Εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ Β ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς Ε, Θ· μείζων ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ. Καὶ φανερὸν ὅτι ἡ ΑΓ μεθ' ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ τῆς

λοιπῆς μείζων ἐστί. Λέγω ὅτι καὶ αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι. Συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΗΘΚ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΛ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ. Καὶ ἐπεὶ δύο



αἱ ΑΒ, ΒΛ, δυσὶ ταῖς ΗΘ, ΘΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΛ βάσει τῇ ΗΚ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Θ σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΒΛ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΛΓ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ΗΚ τῇ ΑΛ· αἱ ἄρα ΔΖ, ΗΚ τῶν ΑΛ, ΛΓ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ ΑΛ, ΛΓ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι, τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

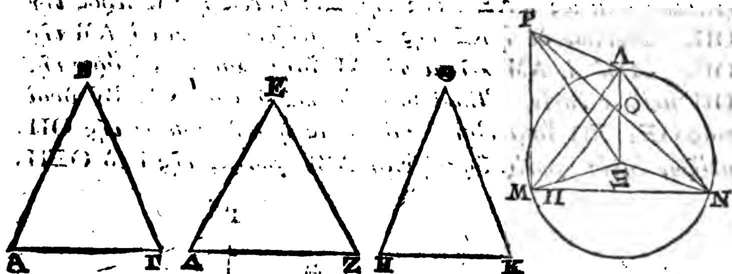
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ΄.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ

μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

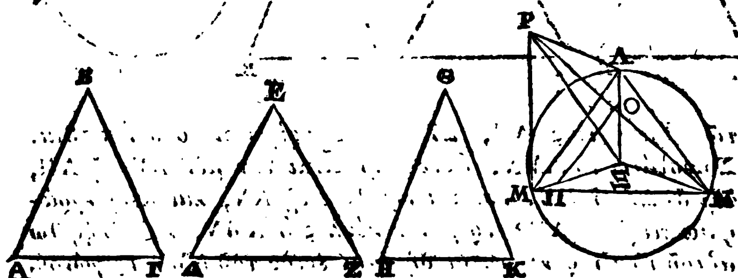
Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ



τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Συνεστάτω τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΓ τῇ ΛΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΜΝ, καὶ ἔτι τὴν ΗΚ τῇ ΛΝ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον κύκλος ὁ ΛΜΝ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον· ἔσται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΛΜΝ τριγώνου, ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός.

Ἔστω πρότερον ἐντὸς, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. Ἔστω πρότερον ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· ἡ ΛΞ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση. Ἡ δὲ ΛΞ τῇ ΞΜ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΛΞ, ΞΜ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΛΜ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΛΞΜ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΜΞΝ ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΝΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ εἰσὶν ἴσαι. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τέτρασιν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἴση ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ

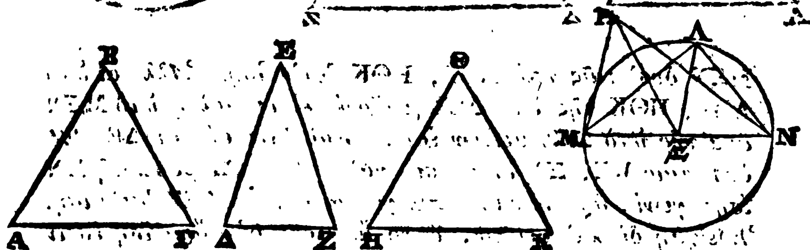
ΑΒ τῇ ΛΞ. Εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΛΟ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ ΛΜ τῇ ΟΠ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τῷ ΟΠΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΜ οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΟ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΟΠ. Μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. Ἀλλ' ἡ ΛΜ κεῖται τῇ ΑΓ ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ



μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΜΞΝ μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΝΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τριῶν τῶν ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ μείζονές εἰσιν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τεσσάρων ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσονες. Ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΛΞ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. Ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΡ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπίπεδον· καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ ὀρθή ἐστιν ἡ ΡΞ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· βάσις ἄρα ἡ ΡΛ βάσει τῇ ΡΜ

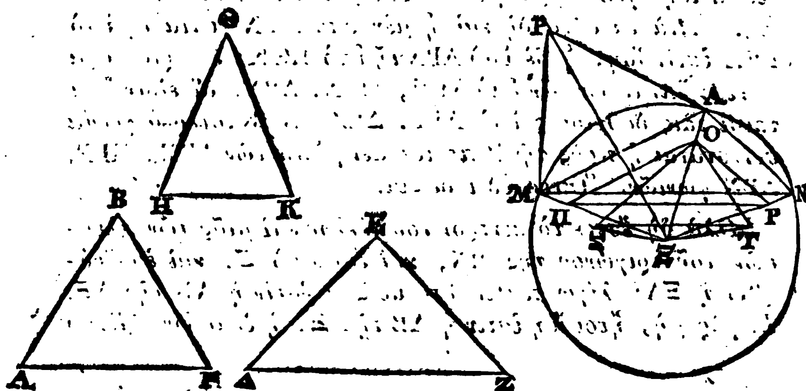
ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΡΝ ἑκατέρα τῶν ΡΛ, ΡΜ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΡ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΛΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΛ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΡΛ. Ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, τῇ δὲ ΡΛ ἴση ἑκατέρα τῶν ΡΜ, ΡΝ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἑκάστῃ τῶν ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΡ, ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΛΜ βάσει τῇ ΑΓ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΡΜ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΜΡΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΡΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ· ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰ γωνία συνίσταται ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ γωνιῶν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΛ· λέγω πάλιν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. Ἔστω πρότερον ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΛ, τουτέστι τῇ ΜΝ, ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· καὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἴση ἐστὶ τῇ ΛΞ. Ὁμοίως δὴ οὐδὲ ἐλάττων, πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον



μεῖζον· ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. Καὶ ἐὰν ὁμοίως ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ ΛΜΝ τριγώνου, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω δὴ καὶ οὕτως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων. Ἔστω πρότερον ἴση· δύο οὖν αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΜΛ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΞΛ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΛΞΝ ἐστὶν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ



ΜΞΝ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ὑπὸ ΜΞΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΝ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΜΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ. Ἑξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων· μείζων ἄρα. Καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν τὴν ΞΡ, καὶ ἴσην αὐτὴν ὑποθώμεθα, ᾧ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν

ΑΒ

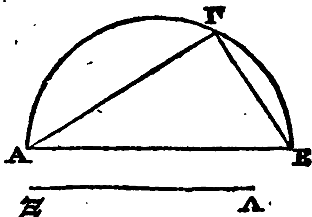
ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΟΛ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΠΟ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τρίγωνον τῷ ΠΞΟ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΜ οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΟ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΟΠ. Μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. Ἀλλὰ ἡ ΛΜ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῆς ΟΠ ἐστὶ μείζων. Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ κἂν τὴν ΞΡ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ΞΟ, ΞΠ ἀπολάβωμεν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΟΡ, δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΟΞΡ μείζων ἐστί. Συνεστάτω δὴ πρὸς τὴν ΛΞ εὐθείαν καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΣ, τῇ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΤ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ΞΣ, ΞΤ τῇ ΟΞ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΣ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΟΞΣ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, βάσει τῇ ΟΣ ἐστίν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΝ τῇ ΟΤ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΛ, ΛΝ δυσὶ ταῖς ΣΟ, ΟΤ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΛΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΟΤ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΣΤ μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΣΞ, ΞΤ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΞΤ τοῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον.

ΛΗΜΜΑ.

Ὃν δὲ τρόπον ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, δείξομεν οὕτως.

Ἐκκείσθωσαν αἱ ΑΒ, ΛΞ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ

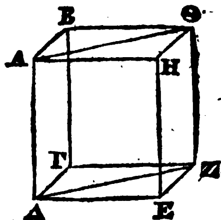
εἰς τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ ΛΞ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς ΑΒ διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.



Ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΒΓ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὥςτε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. Ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΛΞ· ὥςτε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. Ἐὰν οὖν τῇ ΒΓ ἴσην τῇ ΞΡ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΛ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΡ. Ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ΄.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμα ἐστί.



Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ· λέγω ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΑΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΑΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ παραλληλόγραμμόν ἐστιν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΔΖ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΓΖ· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ

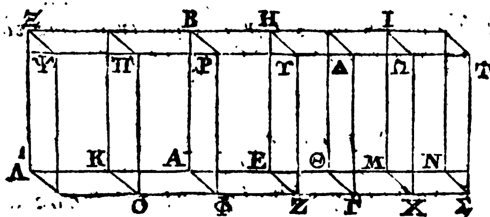
ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΓ, ΓΖ ἁπτομένας ἀλλήλων εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΒΘ διπλάσιον τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΔΓΖ διπλάσιον τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΕ παραλληλογράμμῳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ τῷ ΗΖ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΖΗ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΡΑ, ΔΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕΖΦ βάσις πρὸς τὴν ΕΘΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΖΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΗΓΔ στερεόν.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΘ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΑΕ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΑΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΘ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΘΜ, ΜΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ στερεά. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΛΚ, ΚΑ,

ΑΞ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΛΨ, ΚΠ, ΑΡ ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ μὲν ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα. Ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΑΖ βάσεως τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΑΥ στερεοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΥ στερεὸν τοῦ ΘΥ στερεοῦ. Καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῇ ΝΖ βάσει ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τῷ ΝΥ στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΥ, ΥΘ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΑΖ βάσεως καὶ τοῦ ΑΥ στερεοῦ, ἥτε ΛΖ βάσις καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν, τῆς δὲ ΘΖ βάσεως καὶ τοῦ ΘΥ στερεοῦ, ἥτε ΝΖ βάσις καὶ τὸ ΝΥ στερεόν· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν οὕτως τὸ ΑΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΥΘ στερεόν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

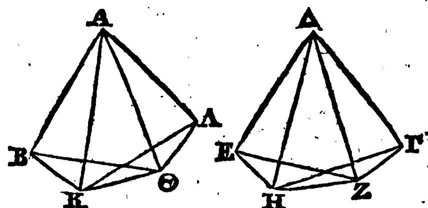
Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τὸ Δ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α

τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΓ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ μὲν ὑπὸ ΕΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΛ, τῇ δὲ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΚ, καὶ κείσθω τῇ ΔΗ ἴση ἡ ΑΚ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΛ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΘ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΗΖ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ· λέγω ὅτι ἡ πρὸς τῷ Α στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΚΒ, ΖΕ, ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτο-



μένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΖΗΔ, ΖΗΕ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ, ΘΚΒ γωνιῶν ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΕΗ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΖΕ. Πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΑΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΔΗ, ΗΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΘΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΘΒ βάσει τῇ ΖΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ

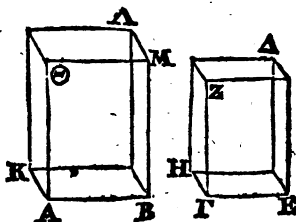
ΘΑΛ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση· ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς ΑΛ, ΔΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ, ΖΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΒΑΛ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ὑπόκειται ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΑΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΔΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΛ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΚΛ βάσει τῇ ΗΓ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΛΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΖ εἰσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΛ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ, εἰσὶν ἴσαι, καὶ βάσις ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΛ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση συνέσταται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΔΓ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.



Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΘ, ΘΑΚ, ΚΑΒ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ, τὴν δὲ ὑπὸ ΚΑΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς τὴν

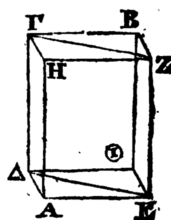
ΓΖ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ· καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΖΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΘ. Καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΑΛ στερεόν.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΒ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι, καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΛ στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἀναγέγραπται τὸ ΑΛ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.



Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ· λέγω ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΖΒ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒ ἴσον, ἀπεναντίον γάρ, το δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ, ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων

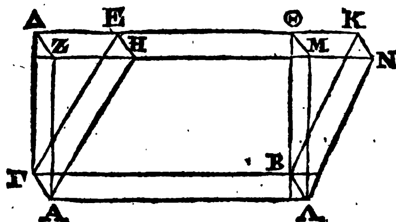
περιέχονται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει· ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τέτμηται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΖ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ΖΝ, ΔΚ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΘ, ΕΚ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΕΚ ἐστὶν ἴση. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ τὸ μὲν ΔΕΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΒ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΝ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΖΑΗ τρίγωνον τῷ ΜΛΝ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν



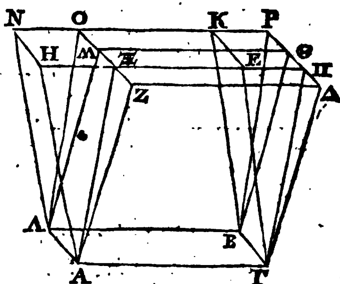
ΓΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ, ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΑΖΗ, ΓΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΜΛΝ, ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΘΝ, ΝΒ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒ παρα-

ἀλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΓΝ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἔστω γὰρ ἐπὶ αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

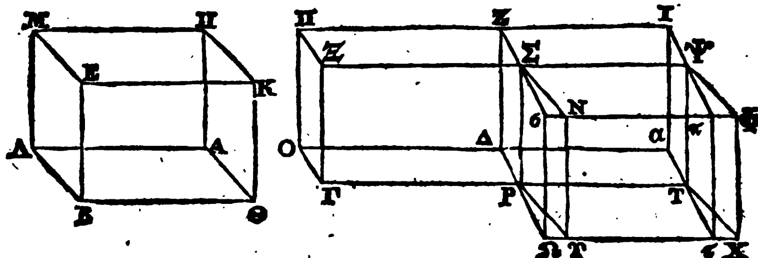
Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΝΚ, ΔΘ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΜ, ΗΕ ἐπὶ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ, ΒΡ. Ἴσον δή ἐστι ΓΜ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΖΔΘΜ τῷ ΓΟ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΖΟ, ΔΡ. Ἀλλὰ τὸ ΓΟ στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΚΝ, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΒΓΔ, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΗΠ, ΝΡ· ὥςτε καὶ τὸ ΓΜ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ.

Τὰ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα΄.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ.

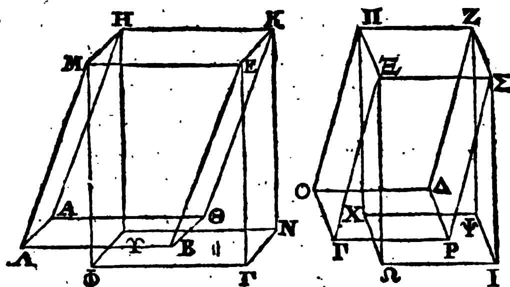


Ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΓΡ εὐθείᾳ ἡ ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ τῇ ὑπὸ ΑΛΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΤΡΥ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΛΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥτε ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΥ στερεόν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ δυσὶ ταῖς ΑΛ, ΛΒ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΡΧ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΛ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῇ ΡΤ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΡΣ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΜ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΛΕ τῷ ΣΥ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΑΕ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΨΥ στερεοῦ ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον· ὅλον ἄρα τῷ ΑΕ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΨΥ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί. Διήχθωσαν αἱ ΔΡ, ΧΥ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ

τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθω ἡ Ττ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἡ Ττ καὶ ἡ ΟΔ καὶ συνεζεύχθωσαν κατὰ τὸ α, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ΩΨ, ΡΙ στερεά· ἴσον δή ἐστι τὸ τὸ ΨΩ στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ Ωπ τῷ ΨΥ στερεῷ, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΥΦ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΨ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, αἱ ΡΩ, ΡΥ, Ττ, ΤΧ, Σσ, ΣΝ, Ψπ, ΨΦ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΩΧ, σΦ. Ἀλλὰ τὸ ΨΥ στερεὸν τῷ ΑΕ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΡΥΧΤ παραλληλόγραμμον τῷ ΩΤ παραλληλογράμμῳ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΤ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΡΤ, ΩΧ, ἀλλὰ τὸ ΡΥΧΤ τῷ ΓΔ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ ΑΒ· καὶ τὸ ΩΤ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον. Ἄλλο δὴ τὸ ΔΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ. Καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΖ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν οὕτως τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΨ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΩΤ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. Ἀλλ' ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ οὕτως ἡ ΩΤ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεὸν οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΓΖ, ΩΨ στερεῶν πρὸς τὸ ΡΙ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΖ στερεὸν τῷ ΩΨ στερεῷ. Ἀλλὰ τὸ ΩΨ τῷ ΑΕ ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα τῷ ΓΖ ἐστὶν ἴσον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΞ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσι· λέγω πάλιν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι αἱ ΚΝ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ν, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΤ, ΥΦ, ΝΥ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ· ἴσον δή ἐστι

τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῷ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν



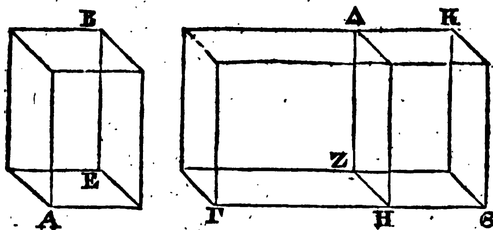
τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΠΙ τῷ ΓΖ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστὶν ἴσον.

Τὰ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΖΗ τῷ ΑΕ ἴσον τὸ ΖΘ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΖΘ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΓΔ

στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τῷ ΗΚ· ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΗΚ στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΑΕ, ΖΘ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπιπέδῳ τῷ ΔΗ τέμνηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΘΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΘΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΓ στερεόν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Τὰ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

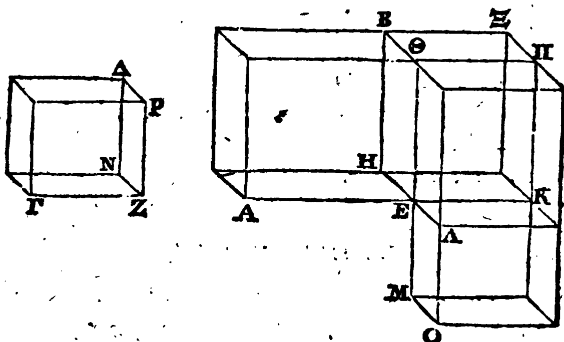
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΖ ἴση ἡ ΕΚ, τῇ δὲ ΖΝ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ ἔτι τῇ ΖΡ ἴση ἡ ΕΜ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ ΚΟ στερεόν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΕ, ΕΛ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΕΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστὶν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστὶν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τὴν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὅμοιον τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΝ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΜ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓΡ παραλληλογράμμῳ, καὶ ἔτι τὸ ΕΟ τῷ ΔΖ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΚΟ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΓΔ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΚΟ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. Συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βά-

σεων μὲν τῶν ΗΚ, ΚΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΑΒ, στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ ΕΞ, ΛΠ. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς την ΓΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΝ, καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν



ΖΡ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΓ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΖΝ τῇ ΕΛ, ἡ δὲ ΖΡ τῇ ΕΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, καὶ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ οὕτως τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ οὕτως τὸ ΚΗ πρὸς τὸ ΚΛ καὶ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΗ προς τὸ ΗΚ οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ στερεὸν, ὡς δὲ τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως τὸ ΞΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεὸν, ὡς δὲ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ, καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ, καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὸν ΕΚ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν ΚΟ στερεὸν

τῷ ΓΔ στερεῷ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

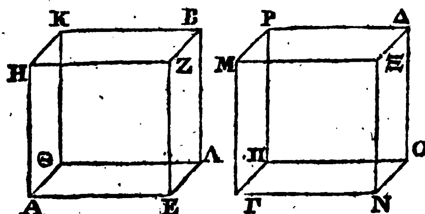
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπειδήπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ′.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΕΖ, ΛΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως



ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον,

ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση· τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. Εἰ γὰρ, τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἴσων οὐσῶν, μὴ εἴη τὰ ΑΗ, ΓΜ ὕψη ἴσα· οὐδ' ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ. Ὑπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισόν ἐστι τὸ ΓΜ ὕψος τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ φανερὸν ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. Εἰ γὰρ μὴ, οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ ἴσα ἔσται· ὑπόκεινται δὲ ἴσα. Κείσθω οὖν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΝΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἄλλο δέ τι τὸ ΓΦ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν οὕτως ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά· ὡς δὲ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν οὕτως ἡ ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἴση δὲ ἡ ΓΤ τῇ ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ΑΗ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Πά-

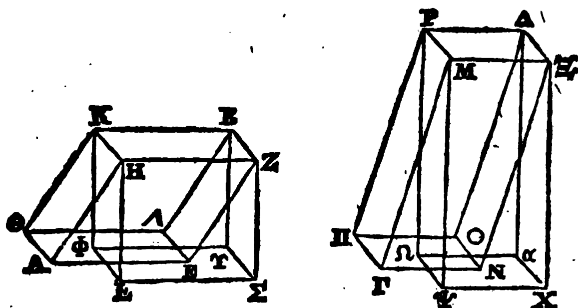
Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Ἔστωσαν γὰρ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσι. Καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΗ βάσει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψει. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ ἴση, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. Κείσθω τῇ ΑΗ ἴση πάλιν ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ ΓΦ στερεόν. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΓΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά, ὡς δὲ ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ οὕτως ἥτε ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΚΘ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἐπίπεδα κάθετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω σημεῖα, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ στερεά· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ

στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΒ τὸ ΒΤ ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῇ ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὶ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν,



τὸ δὲ ΓΔ στερεὸν τῷ ΔΨ ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον ἐστί. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. Ἴση δὲ ἡ μὲν ἡ ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. Τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ, ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ

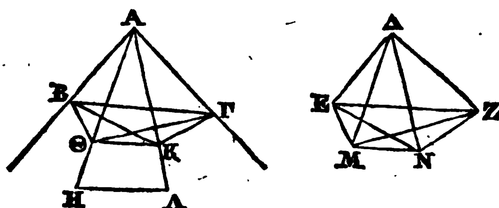
ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ΞΡ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. Τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ, ΔΥ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΥ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΒΤ, ΔΥ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασι δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΤ στερεὸν τῷ ΔΥ στερεῷ, Ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΤ τῷ ΑΒ ἴσον ἐστὶν, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ ΔΥ στερεὸν τῷ ΔΓ στερεῷ ἴσον ἐστὶν, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἐστιν ἴσον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ὑπὸ τῶν καθέτων, ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι· ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι, αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ ΑΗ, ΔΜ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΜΔΕ τῇ ὑπὸ ΗΑΒ, τὴν δὲ ὑπὸ ΜΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΔΜ τυχόντα σημεῖα, τὰ Η, Μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Μ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΒΑΓ,

ΕΔΖ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΛ, ΜΝ, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Λ, Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΑ, ΝΔ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΑΛ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΔΝ γωνίᾳ.



Κείσθω τῇ ΔΜ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ ΗΛ παράλληλος ἡ ΘΚ. Ἡ δὲ ΗΛ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον. Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ, Ν σημείων ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΔΖ, ΔΕ εὐθείας κάθετοι αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΝΖ, ΝΕ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΓ, ΓΒ, ΜΖ, ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΚΓ, ΓΑ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ΓΑ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΓ, ΓΑ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΑ γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΜ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΜ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΜΔΖ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΜΔΖ, ΘΑΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΑΘ τῇ ΔΜ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση ἐστίν. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΜΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ΑΚ, ΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΚ, ΚΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΘΚΒ γωνία, διὰ τὸ καὶ

τὴν ΘΚ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΜ ἴση· ὑπόκεινται γὰρ, καὶ ἔστιν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ· δύο δὴ αἱ ΓΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, Ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΝ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ τῇ ὑπὸ ΖΕΝ ἐστὶν ἴση. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΓΒΚ, ΖΕΝ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΖΝ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΚ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσὶ καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΜΝ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΚ δυσὶ ταῖς ΜΔ, ΔΝ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῇ ΝΜ ἐδείχθη ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

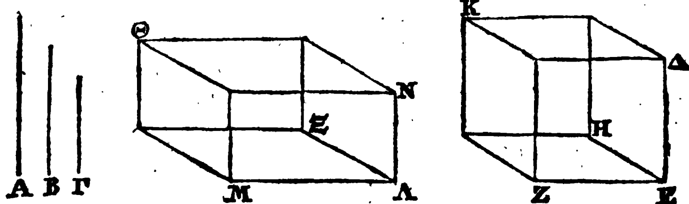
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἀπ᾽ αὐτῶν

μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.



Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Ε περιεχομένη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΕΚ στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ Α κείσθω ἴση ἡ ΛΜ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΛΜ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ Ε στερεᾷ γωνίᾳ ἴση στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΝΛΞ, ΞΛΜ, ΜΛΝ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἡ ΛΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΛΝ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν Α τῇ ΛΜ, ἡ δὲ Β ἑκατέρᾳ τῶν ΛΞ, ΕΔ, ἡ δὲ Γ τῇ ΛΝ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΛΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ ΜΛΝ, ΔΕΖ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΝ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΖ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπε-

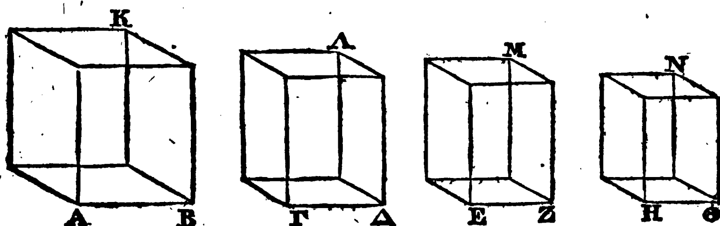
δοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔΕΖ, ΝΛΜ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστήκασιν αἱ ΛΞ, ΕΗ ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η, Ξ σημείων κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΝΛΜ, ΔΕΖ ἐπίπεδα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε τὰ ΛΘ, ΕΚ στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛ στερεὸν τῷ ΕΚ στερεῷ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΛ τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν, τὸ δὲ ΕΚ τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ



ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΑ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΛΓ, τὸ ΚΑ ἄρα πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει

ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΛΓ στερεὸν οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΝΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

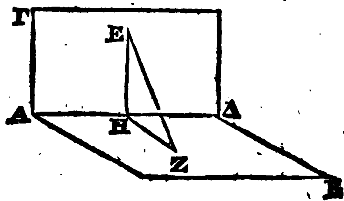
Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ· ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος.

Ἐπίπεδον γὰρ τὸ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς ΔΑ πεσεῖται.



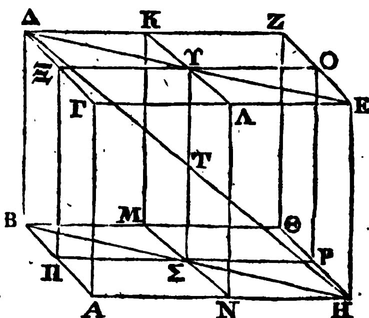
Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΗ, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΗ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ, οὖσα ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΗΕ γωνία. Ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΗ ὀρθή ἐστι. Τριγώνου δὴ τοῦ ΕΖΗ

αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔΑ· ἐπὶ τὴν ΔΑ ἄρα πεσεῖται.

Ἐὰν ἄρα ἐπίπεδον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθʹ.

Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ· ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.



Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ ΑΖ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΖ, ΑΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΝ, ΞΡ, κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διαγώνιος ἡ ΔΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞΥ, ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΥ τῇ ΥΕ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΥΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΥΕ γωνίᾳ· διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΔΥΕ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖά ἐστι καὶ ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. Καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΗΒ· παράλληλος ἄρα

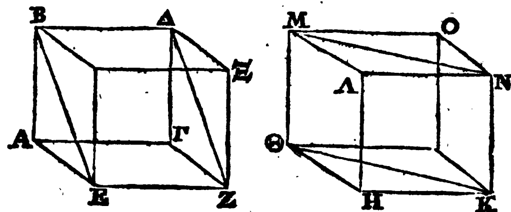
ἐστὶν ἡ ΔΕ *τῇ* ΒΗ. *Καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ* Δ, Υ, Η, Σ, *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ* ΔΗ, ΥΣ· *ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ* ΔΗ, ΥΣ. *Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ* ΔΕ *τῇ* ΒΗ, *ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ* ΕΔΤ *γωνία τῇ ὑπὸ* ΒΗΤ, *ἐναλλὰξ γάρ. Ἡ δὲ ὑπὸ* ΔΤΥ *τῇ ὑπὸ* ΗΤΣ *ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ* ΔΤΥ, ΗΤΣ *τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν* ΔΥ *τῇ* ΗΣ, *ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν* ΔΕ, ΒΗ· *καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ μὲν* ΔΤ *τῇ* ΤΗ, *ἡ δὲ* ΥΤ *τῇ* ΤΣ.

Ἐὰν ἄρα στερεοῦ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, *καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ* ΑΖ *παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ* ΗΘΚ *τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ* ΑΖ *παραλληλόγραμμον τοῦ* ΗΘΚ *τριγώνου· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ* ΑΒΓΔΕΖ *πρίσμα τῷ* ΗΘΚΛΜΝ *πρίσματι.*



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΞ, ΗΟ *στερεά. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ* ΑΖ *παραλληλόγραμμον τοῦ* ΗΘΚ *τριγώνου, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ* ΘΚ *παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ* ΗΘΚ *τριγώνου· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ* ΑΖ *παραλληλόγραμ-*

μον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ στερεὸν τῷ ΗΟ στερεῷ. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΞ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΟ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜΝ πρίσμα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

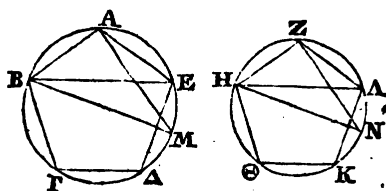
Ἐὰν ἄρα ᾖ, καὶ τὰ ἑξῆς.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER DUODECIMUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, *καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ* ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, *διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ* ΒΜ, ΗΝ· *λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς* ΒΜ *τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΗΝ *τετράγωνον οὕτως τὸ* ΑΒΓΔΕ *πολύγωνον πρὸς τὸ* ΖΗΘΚΛ *πολύγωνον.*



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. *Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ* ΑΒΓΔΕ *πολύγωνον τῷ* ΖΗΘΚΛ *πολυγώνῳ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ* ΒΑΕ *γωνία τῇ ὑπὸ* ΗΖΛ, *καὶ ἔστιν ὡς ἡ* ΒΑ *πρὸς τὴν* ΑΕ *οὕτως ἡ* ΗΖ *πρὸς τὴν* ΖΛ· *δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ* ΒΑΕ, ΗΖΛ *μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ* ΒΑΕ *τῇ ὑπὸ* ΗΖΛ, *περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ* ΑΒΕ

τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΗ. Ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΜΒ ἐστὶν ἴση, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν· ἡ δὲ ὑπὸ ΖΛΗ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΜ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΗΖΝ ἴση· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ὁ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ. Ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

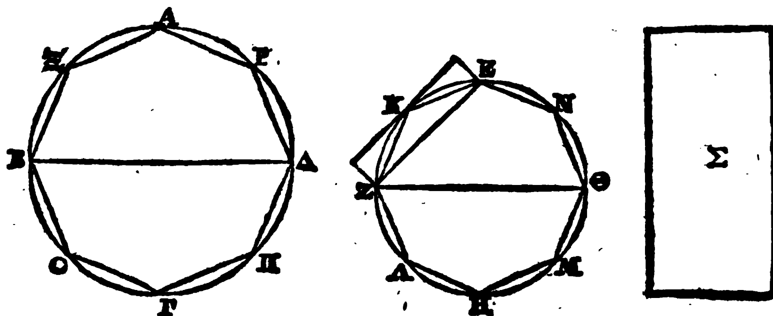
ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ΕΖΗΘ κύκλον.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ. Καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων ἐφαπτομένας εὐθείας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον. Τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάσσων ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως

τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύ-



κλου· ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου. Ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. Ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου *), ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. Λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ,

*) Vide ad calcem huius propositionis *ΛΗΜΜΑ α'*.

ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ *τμήματα τοῦ* ΕΖΗΘ *κύκλου ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ* ΕΖΗΘ *κύκλος τοῦ* Σ *χωρίου· λοιπὸν ἄρα τὸ* ΕΚΖΛΗΜΘΝ *πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ* Σ *χωρίου. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν* ΑΒΓΔ *κύκλον τῷ* ΕΚΖΛΗΜΘΝ *πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ* ΑΞΒΟΓΠΔΡ· *ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς* ΒΔ *τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΘ *τετράγωνον οὕτως τὸ* ΑΞΒΟΓΠΔΡ *πολύγωνον πρὸς τὸ* ΕΚΖΛΗΜΘΝ *πολύγωνον. Ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς* ΒΔ *τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΘ *οὕτως ὁ* ΑΒΓΔ *κύκλος πρὸς τὸ* Σ *χωρίον· καὶ ὡς ἄρα ὁ* ΑΒΓΔ *κύκλος πρὸς τὸ* Σ *χωρίον οὕτως τὸ* ΑΞΒΟΓΠΔΡ *πολύγωνον πρὸς τὸ* ΕΚΖΛΗΜΘΝ *πολύγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ* ΑΒΓΔ *κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον οὕτως τὸ* Σ *χωρίον πρὸς τὸ* ΕΚΖΛΗΜΘΝ *πολύγωνον. Μείζων δὲ* ΑΒΓΔ *κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ* Σ *χωρίον τοῦ* ΕΚΖΛΗΜΘΝ *πολυγώνου. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς* ΒΔ *τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΘ *οὕτως ὁ* ΑΒΓΔ *κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ* ΕΖΗΘ *κύκλου χωρίον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΘ *πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΒΔ *οὕτως ὁ* ΕΖΗΘ *κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ* ΑΒΓΔ *κύκλου χωρίον. Λέγω δὴ ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς* ΒΔ *πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΘ *οὕτως ὁ* ΑΒΓΔ *κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ* ΕΖΗΘ *κύκλου χωρίον. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ* Σ· *ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΘ *τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΒΔ *οὕτως τὸ* Σ *χωρίον πρὸς τὸ* ΑΒΓΔ *κύκλον· ἀλλ' ὡς τὸ* Σ *χωρίον πρὸς τὸν* ΑΒΓΔ *κύκλον οὕτως ὁ* ΕΖΗΘ *κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ* ΑΒΓΔ *κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΘ *πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΒΔ *οὕτως ὁ* ΕΖΗΘ *κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ* ΑΒΓΔ *κύκλου χωρίον, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς* ΒΔ *τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΘ *οὕτως ὁ* ΑΒΓΔ *κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ* ΕΖΗΘ *κύκλου χωρίον. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς* ΒΔ *τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΖΘ *τετράγωνον οὕτως ὁ* ΑΒΓΔ *κύκλος πρὸς τὸν* ΕΖΗΘ *κύκλον.*

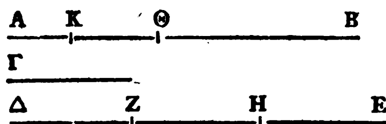
Οἱ ἄρα κύκλοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΛΗΜΜΑ α'

(ex libro X Elem. hic insertum).

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται· λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ AB, Γ, *ὧν μεῖζον τὸ* AB· *λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ* AB *ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μεγέθος ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ* Γ *μεγέθους.*



Τὸ Γ *γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ* AB *μεῖζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ* ΔE *τοῦ μὲν* Γ *πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ* AB *μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ* ΔE *εἰς τὰ τῷ* Γ *ἴσα τὰ* ΔZ, ZH, HE, *καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ* AB *μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ* BΘ, *ἀπὸ δὲ τοῦ* AΘ *μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ* ΘK, *καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ* AB *διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ* ΔE *διαιρέσεσιν· ἔστωσαν οὖν αἱ* AK, KΘ, ΘB *διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι ταῖς* ΔZ, ZH, HE.

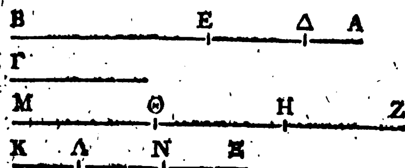
Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔE *τοῦ* AB, *καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ* ΔE *ἔλασσον τοῦ ἡμίσους τὸ* EH, *ἀπὸ δὲ τοῦ* AB *μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ* BΘ· *λοιπὸν ἄρα τὸ* HΔ *λοιποῦ τοῦ* ΘA *μεῖζόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ* HΔ *τοῦ* ΘA, *καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν* HΔ *ἥμισυ τὸ* HZ, *τοῦ δὲ* ΘA *μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ* ΘK· *λοιπὸν ἄρα τὸ* ΔZ *λοιποῦ τοῦ* AK *μεῖζόν ἐστιν. Ἴσον δὲ τὸ* ΔZ *τῷ* Γ· *καὶ τὸ* Γ *ἄρα τοῦ* AK *μεῖζόν ἐστιν. Ἔλασσον ἄρα τὸ* AK *τοῦ* Γ· *καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ* AB *μεγέθους τὸ* AK *μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ* Γ. *Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα.

ΛΑ-

ΑΛΛΩΣ.

Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ, ἔστω δὲ τὸ Γ ἔλασσον, καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεγέθους μεῖζον. Γεγονέτω ὡς τὸ ΖΜ, καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῷ Γ, καὶ ἔστω τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφῃρήσθω μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΕ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὰ ΕΔ. Καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἴσαι γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΖΜ διαιρέσεσι. Γεγονέτωσαν ὡς αἱ ΒΕ, ΕΔ, ΔΑ, καὶ τῷ ΔΑ ἕκαστον τῶν ΚΛ, ΛΝ, ΝΞ ἔστω ἴσον, καὶ τοῦτο γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ διαιρέσεις τοῦ ΚΞ ἴσαι γένωνται ταῖς τοῦ ΖΜ.



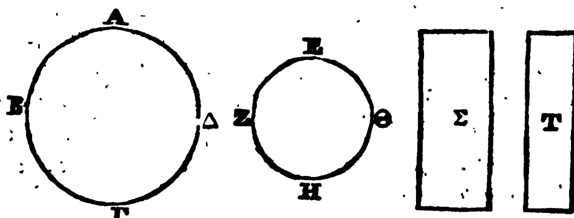
Καὶ ἐπεὶ τὸ ΒΕ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΑΒ, τὸ ΒΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΕΑ· πολλῷ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ τὸ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΝ· τὸ ΒΕ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΞ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΕΔ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΕΑ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ τὸ ΑΔ ἐστιν ἴσον τῷ ΝΛ· τὸ ΕΔ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΛ· Ἴσον δὲ τὸ ΔΑ τῷ ΛΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΑ μεῖζόν ἐστιν ὅλου τοῦ ΞΚ. Ἀλλὰ τοῦ ΒΑ μεῖζόν ἐστι τὸ ΜΖ· πολλῷ ἄρα τὸ ΜΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΚ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ΞΝ, ΝΛ, ΛΚ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ ΜΖ τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ ΞΚ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΛ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως τὸ ΞΚ πρὸς τὸ ΖΜ. Μεῖζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΞΚ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τοῦ ΛΚ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῷ Γ, τὸ δὲ ΚΛ τῷ ΑΔ· τὸ Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΔ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ β΄.

Λέγω δὴ, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς

τὸ ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· λέγω ὅτι ἔλασ-

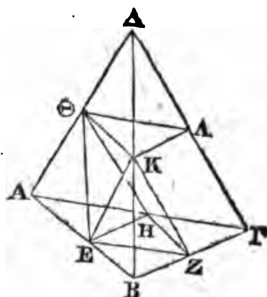


σόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. Μεῖζον δὲ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου· ὥςτε ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

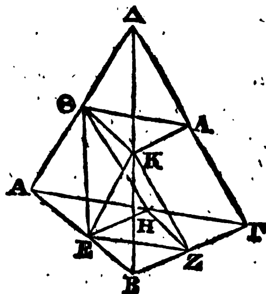
Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ· καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.



Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ *δίχα κατὰ τὰ* Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ *σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ* ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ. *Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν* ΑΕ *τῇ* ΕΒ, *ἡ δὲ* ΑΘ *τῇ* ΘΔ· *παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ* ΕΘ *τῇ* ΔΒ. *Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ* ΘΚ *τῇ* ΑΒ *παράλληλός ἐστι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ* ΘΕΒΚ· *ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ* ΘΚ *τῇ* ΕΒ. *Ἀλλὰ ἡ* ΕΒ *τῇ* ΕΑ *ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ* ΕΑ *ἄρα τῇ* ΘΚ *ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ* ΑΘ *τῇ* ΘΔ *ἴση· δύο δὴ αἱ* ΕΑ, ΑΘ *δυσὶ ταῖς* ΚΘ, ΘΔ *ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ* ΕΑΘ *γωνίᾳ τῇ ὑπὸ* ΚΘΔ *ἴση· βάσις ἄρα ἡ* ΕΘ *βάσει τῇ* ΚΔ *ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ* ΑΕΘ *τρίγωνον τῷ* ΘΚΔ *τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ* ΑΘΗ *τρίγωνον τῷ* ΘΛΔ *τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ* ΕΘ, ΘΗ *παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς* ΚΔ, ΔΛ *εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ* ΕΘ *γωνία τῇ ὑπὸ* ΚΔΛ *γωνίᾳ. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ* ΕΘ, ΘΗ *δυσὶ ταῖς* ΚΔ, ΔΛ *ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ* ΕΘΗ *γωνίᾳ τῇ ὑπὸ* ΚΔΛ *ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ* ΕΗ *βάσει τῇ* ΚΛ *ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ* ΕΘΗ *τρίγωνον τῷ* ΚΔΛ *τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ* ΑΕΗ *τρίγωνον τῷ* ΘΚΛ *τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ* ΑΕΗ *τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ* Θ *σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ* ΘΚΛ *τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ* Δ *σημεῖον. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ* ΑΔΒ *παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν* ΑΒ *ἦκται ἡ* ΘΚ, *ἰσογώνιόν ἐστι τὸ* ΑΔΒ *τρίγωνον τῷ* ΔΘΚ *τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ* ΑΔΒ *τρίγωνον τῷ* ΔΘΚ *τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν* ΔΒΓ *τρίγωνον τῷ* ΔΚΛ *τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ* ΑΔΓ *τῷ* ΔΛΘ. *Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ* ΒΑ, ΑΓ *παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς* ΚΘ,

ΘΛ εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΛ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΛΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὅμοιόν ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Ἀλλὰ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ὥςτε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου. Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ ὦσι, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. Καὶ φανερὸν ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις, τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΛΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα· ἐπειδήπερ καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ, ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. Ἀλλ' ἡ πυ-



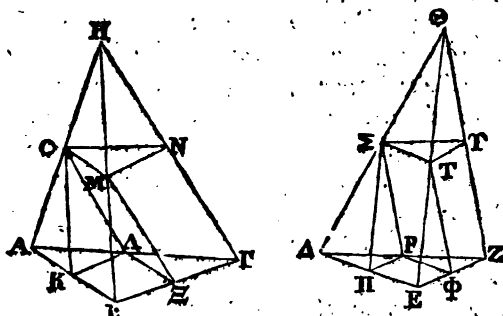
ραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται· ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. Ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Ε σημεῖα· ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, διῄρηται εἴς τε δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται· ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρό-

που νενοήσθω διῃρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ· παράλληλος ἄρα ἡ ΞΛ τῇ ΑΒ, καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΞΓ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΦ. Καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ

ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΛΞΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΜΟ εὐθεῖα, πρὸς τὰ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ΕΠΡΦ, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· συνθέντι ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρίσματα πρὸς τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα οὕτως τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΟΜ, ΛΞΓΟΜΝ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα οὕτως τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. Ὡς δὲ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα οὕτως ἐδείχθη ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, καὶ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. Ὁμοίως δὲ κἂν τὰς γενομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον ὡς τὰ ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ, ἔσται ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν ΛΞΓ, ΡΦΖ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως καὶ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τέσσαρα πρὸς τέσσαρα. Τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ΑΚΛΟ καὶ ΔΠΡΣ πυραμίδων καὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα οὗ βάσις τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΦ; οὕτως δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι, ἥτε ΗΓ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΟΜΝ τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. Καὶ τέτμηται ἡ ΗΓ δίχα ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου κατὰ τὸ Ν· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔΕΖ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΥ ἐπιπέδου. Καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ κάθετοι· ἰσοϋψῆ ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μὲν εἰσι τὰ ΛΞΓ, ΡΦΖ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ· ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοϋψῆ τυγχάνον, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

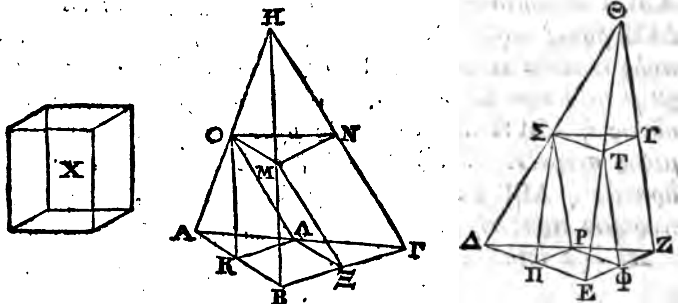
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα. κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Χ καὶ διῃρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυρα-

μίδος. Καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διῃρήσθωσαν, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς ἧς ὑπερέχει ἡ ΔΕΖΘ πυ-



ραμὶς τοῦ Χ στερεοῦ. Λελήφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκα αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Χ στερεοῦ. Διῃρήσθω καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεὸν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεὸν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. Μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμάτων. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν. Λέγω δὴ ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς

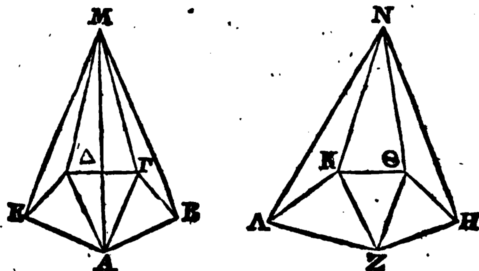
πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. Ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Αἱ ἄρα ὑπὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν αἱ βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Μ, Ν σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις·

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. Καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ὡς ἡ ΖΗΘΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν οὕτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. Καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔΕΜ, ΖΚΛΝ τρίγωνα ἔχουσαι βάσεις, καὶ ὕψος ἴσον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· ὡς δὲ ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα· διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. Ἀλλὰ μὲν καὶ ὡς ἡ ΖΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν οὕτως ἦν καὶ ἡ ΖΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα· καὶ διΐσου πάλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

Πυραμίδες ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

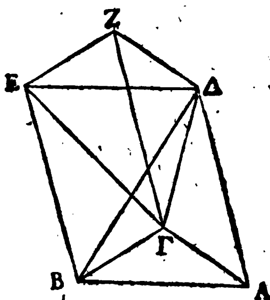
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν

ἡ ΒΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΔΒ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΔΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΔΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΖΓΒΕ, διάμετρος δέ ἐστιν αὐτοῦ ἡ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΕΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΕΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· διῄρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους ἐχούσας βάσεις. Καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΓΑΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται, ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν, τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

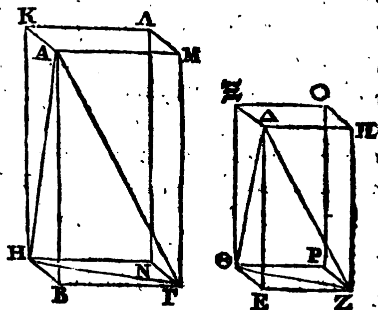
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ τὸ ὕψος ἴσον· ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, καὶ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΒΝ τῷ ΕΡ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΒΚ τῷ ΕΞ· τὰ τρία



ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὅμοιά ἐστιν. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ,

ΒΝ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι· τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. Τὰ δὲ ὅμοια παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τὸ ΒΗΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ὁ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος· καὶ ἡ ΑΒΓΗ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

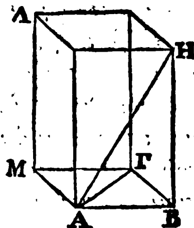
ΠΟΡΙΣΜΑ.

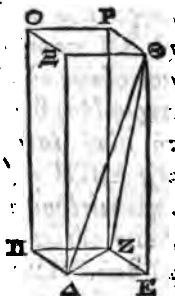
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι, καὶ ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσται ὡς ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας· τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα, ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίας βάσεις ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες, τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος.





Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓΗ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. Ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· τῶν ἄρα ΑΒΓΗ,

ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. Ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψος. Ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. Καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμίς· ἴση ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

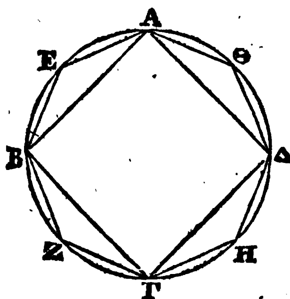
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι′.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστίν.

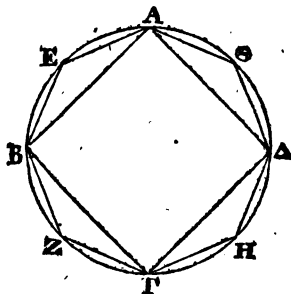
Εἰ μὴ γάρ ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων, ἢ

ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. Ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὴ ΑΒΓΔ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ, τὸ δὴ ἀνεστάμενον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου· καί ἐστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα τετραγόνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, καὶ ἔστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. Ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Θ σημείων παραλλήλους ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίση ἐστὶ τὰ πρίσματα



τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων· καί ἐστι τὰ τοῦ κυλίνδρου ἀποτμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιον ἐστὶ τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετραγώνον περιγράψωμεν, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τε-

τραγώνου, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. Καί ἐστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὰ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα



τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτωσαν ἀφ᾽ ἑκάστου τῶν ΑΗΔ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινὰ τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἧ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὴ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ᾽ ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν

ο ΑΒΓΔ κύκλος. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥςτε ὁ κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου.

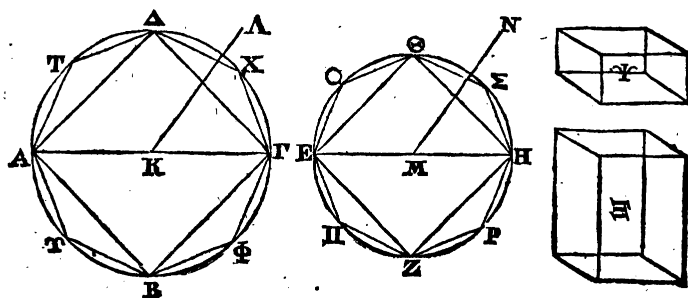
Πᾶς ἄρα κῶνος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μέν εἰσιν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον.

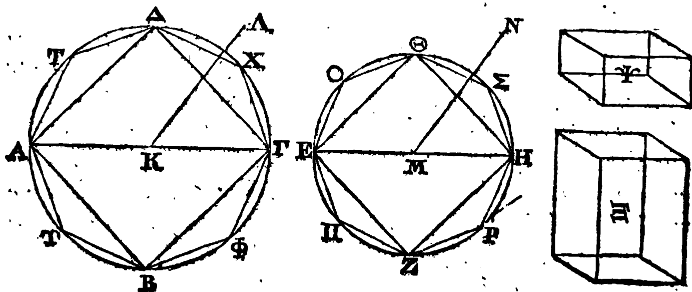
Εἰ γὰρ μὴ, ἔσται ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Ξ, καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ΕΝ κώνου ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ Ψ στερεόν· ὁ ΕΝ κῶνος ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς Ξ, Ψ στερεοῖς. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ



ἥμισυ τοῦ κύκλου. Ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου· ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀνα-

στήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης, πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΕΖΗΘ *τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ* ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ *περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ* Ο, Π, Ρ, Σ *σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ* ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· *ἕκαστον ἄρα τῶν* ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ *τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν* ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ *τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κώνου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ, καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ* Ψ *στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν* ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· *λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ* ΘΟΕΠΖΡΗΣ *πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ* Ξ *στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν* ΑΒΓΔ *κύκλον τῷ* ΘΟΕΠΖΡΗΣ *πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενόν πολύγωνον τὸ* ΔΤΑΥΒΦΓΧ, *καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτῷ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ* ΑΛ *κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς* ΑΓ *πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΕΗ *οὕτως* ΔΤΑΥΒΦΓΧ *πολύγωνον πρὸς τὸν* ΘΟΕΠΖΡΗΣ *πολύγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς* ΑΓ *πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς* ΕΗ *οὕτως ὁ* ΑΒΓΔ *κύκλος πρὸς τὸν* ΕΖΗΘ *κύκλον· καὶ ὡς ἄρα ὁ* ΑΒΓΔ *κύκλος πρὸς τὸν* ΕΖΗΘ *κύκλον οὕτως τὸ* ΔΤΑΥΒΦΓΘ *πολύγωνον πρὸς τὸ* ΘΟΕΠΖΡΗΣ *πολύγωνον. Ὡς δὲ ὁ* ΑΒΓΔ *κύκλος πρὸς τὸν* ΕΖΗΘ *κύκλον οὕτως ὁ* ΑΛ *κῶνος πρὸς τὸ* Ξ *στερεὸν, ὡς δὲ τὸ* ΔΤΑΥΒΦΓΧ *πολύγωνον πρὸς τὸ* ΘΟΕΠΖΡΗΣ *πολύγωνον οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ* ΔΤΑΥΒΦΓΧ *πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ* Λ *σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ* ΘΟΕΠΖΡΗΣ *πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ* Ν *σημεῖον· καὶ ὡς ἄρα ἡ* ΑΛ *κῶνος πρὸς τὸ* Ξ *στερεὸν οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ* ΔΤΑΥΒΦΓΧ *πολύγωνον,*

κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν, τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδα. Μείζων δὲ ὁ ΑΛ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδος. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν. Λέγω δὴ ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον. Ἀλλ' ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεὸν, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ



κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον. Ἀλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλασίων γὰρ ἑκά-

τερος ἑκατέρου· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς τοῖς κώνοις κύλινδροι.

Οἱ ἄρα ὑπὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

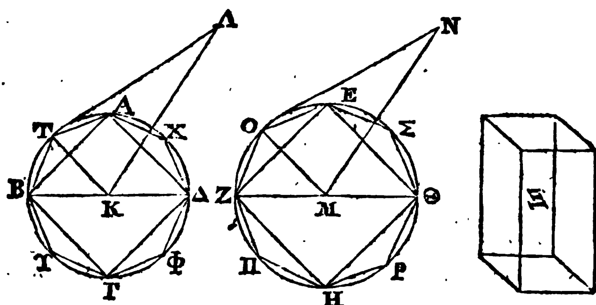
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἕξει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα ΕΖΗΘ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν δὴ αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τρι-

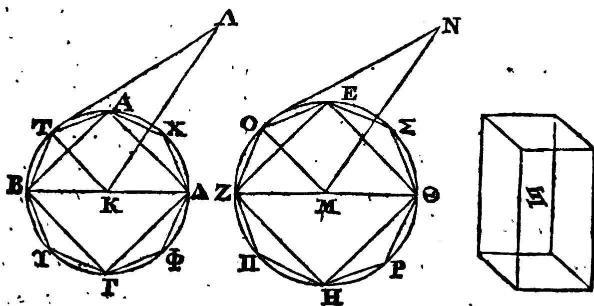
γώνων πυραμίδας, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος τοῦ Ξ στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύ-



γωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολυγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ἓν τρίγωνον, ἔστω τὸ ΛΒΤ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΟΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ, ΜΟ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος τῷ ΕΖΗΘΝ κώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ὁ ΚΛ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξονα. Ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ οὕ-

τως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπειδήπερ ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν. Ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΤ τρίγωνον τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ὁ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΟΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΛ, ΟΜΝ, ὀρθαὶ γὰρ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΚΒ, ΝΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ· διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΤ οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ. Πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΤΚ, ΝΟΜ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΚ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΚΒΤ, ΟΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ οὕτως ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ· διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΒ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΛ οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ· διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΤΛ πρὸς τὴν ΛΒ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ· τῶν ΛΤΒ, ΝΟΖ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΤΒ, ΝΟΖ τρίγωνα· ὥστε καὶ ὅμοια· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΒΚΤ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΖΜΟ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. Αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. Ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν Α, Χ, Δ, Φ, Τ, Υ ἐπὶ τὸ Κ εὐθείας, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἀνιστάντες ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐχούσας τοῖς κώνοις, δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην

ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΒΚ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΜ ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ἀλλ᾽ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὥςτε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, τριπλασίονα λόγον ἔχων ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύ-



κλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. Μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπε-

ριέχει γὰρ αὐτήν· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΗΠΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐχέτω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν· καὶ ΕΖΗΘΝ ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ὁ ΑΒΓΔΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ· ἐδείχθη γὰρ πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· καὶ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

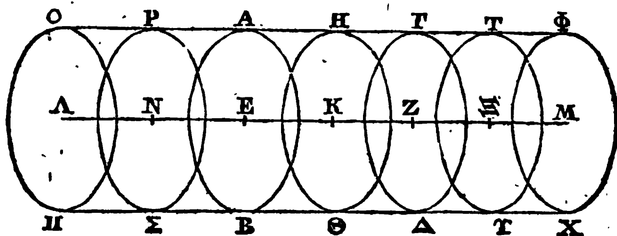
Οἱ ἄρα ὅμοιοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ μὲν ΕΚ ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ, ΝΛ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ ΛΜ ἄξονος κύλινδρος ὁ ΟΧ οὗ βάσεις οἱ ΟΠ, ΦΧ κύκλοι· καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Ν, Ξ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ κυλίνδρου· καὶ ποιείτωσαν τοὺς ΡΣ,



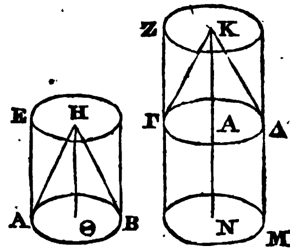
ΤΥ κύκλους περὶ τὰ Ν, Ξ κέντρα. Καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις· οἱ ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις. Ἐπεὶ οὖν καὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ τῷ πλήθει τῶν ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ· ὁσαπλασίων ἄρα ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. Καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ· εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλά-

σια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου, ὅ, τε ΛΚ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου, ὅ, τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ κύλινδρος. Καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων, ἐλάττων· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα.



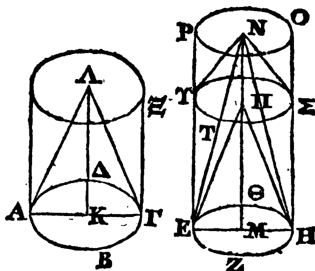
Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓΜ. Ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΖΔ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΛΝ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ αξονα. Ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΝ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. Ὡς δὲ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς ΓΔΚ κῶνον, καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, οἵ τινες καὶ ὕψη εἰσὶν τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ σημπεπληρώσθωσαν οἱ ΑΞ, ΕΟ κύλινδροι· λέγω ὅτι τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος.

Τὸ γὰρ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΝ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον ἴσον. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ ἴσος. Οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ βάσις τῇ ΕΖΗΘ βάσει· ὥςτε καὶ ἀντιπέπονθεν, ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΝ ἴσον, ἀλλ' ἔστω μεῖζον τὸ ΜΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΜΝ ὕψους τῷ ΚΛ ἴσον τὸ ΠΜ, καὶ διὰ τοῦ Π σημείου τεμνέσθω ὁ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ τοῖς τῶν ΕΖΗΘ, ΡΟ κύκλων ἐπιπέδοις, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ ΠΜ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΕΣ. Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ, ἄλλος δέ τις ὁ ΕΣ κύλινδρος· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον. Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον οὕτως ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ ΑΞ, ΕΣ κύλινδροι· ὡς δὲ ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ



ΜΠ ὕψος, ὁ γὰρ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος. Ἴσον δὲ τὸ ΜΠ ὕψος τῷ ΚΛ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· τῶν ἄρα ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων· ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΠ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν· ὡς δὲ τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἴσος ἄρα ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῇ ΒΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΑ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν

αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάττονα τῆς ΑΔ. Λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΔ, ΔΝ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΔ τῇ ΔΝ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΝ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· ἡ ΛΝ ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· πολλῷ ἄρα αἱ ΛΔ, ΔΝ οὐκ ἐφάπτονται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Ἐὰν δὴ τῇ ΛΔ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐγγράφησται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

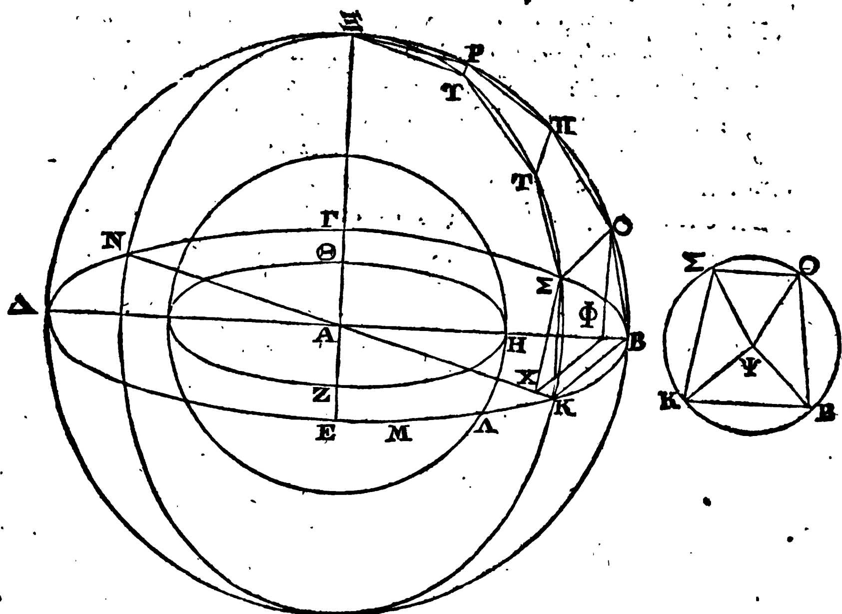
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

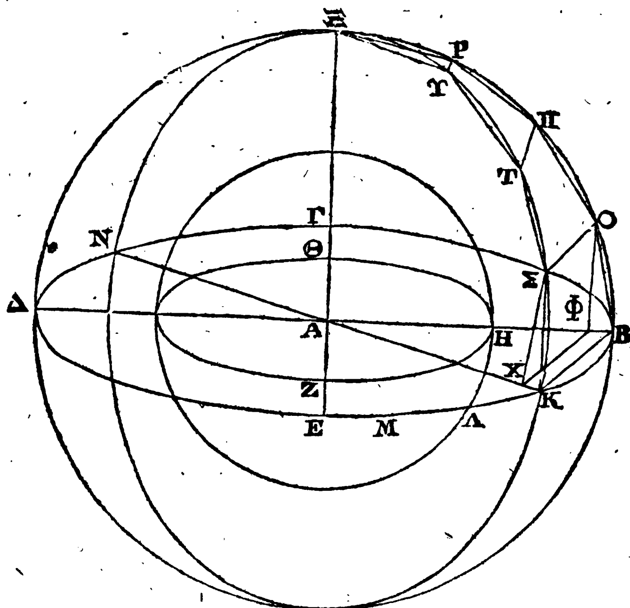
Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα· ὥςτε καὶ καθ' οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. Καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων εὐθειῶν. Ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαί-

σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΖΗΘ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ, ΖΗΘ, εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, καὶ ἐπεζευχθεῖσα, ἡ ΚΑ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΞ, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω, ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. Ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΑ ἐπίπεδά ἐστιν ὀρθὰ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύ-



κλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια, ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ τεταρτημόρια ἀλλήλοις· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΞ, ΚΞ τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ εὐθείαις. Ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς ΒΔ, ΚΝ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπί-



πεδον. Πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΧ. Καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς ΒΞΔ, ΚΞΝ ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΒΟ, ΚΣ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΟΦ, ΣΧ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΟΦ τῇ ΣΧ,

ἡ δὲ ΒΦ τῇ ΚΧ. Ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ὅλῃ τῇ ΚΑ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΦΑ λοιπῇ τῇ ΧΑ ἐστὶν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ. Καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΟΦ, ΣΧ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΣΧ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αἱ ΧΦ, ΣΟ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ ἐστὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΣΟ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶ παράλληλος. Καὶ ἐπιζευγνῦουσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ, ΚΣ· τὸ ΚΒΟΣ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις *). Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. Ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ σημείων ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον μεταξὺ τῶν ΒΞ, ΚΞ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΚΒΟΣ, ΣΟΡΤ, ΤΠΡΥ τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον. Ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ πλευρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς ΚΒ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαιρίου συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον ὧν βάσεις μὲν τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον.

---

*) Euclidis haec addere potuisset:

Rursus a punctis Π, Τ ad ΒΓΔΕ circuli planum perpendiculares ducantur; cadent utique in communes planorum sectiones ΒΔ, ΚΝ; conjungantur puncta in quibus perpendiculares occurrunt rectis ΒΔ, ΚΝ, et jungantur ipsae ΠΒ, ΤΚ. Similiter utique ostendemus rectam ΚΒ parallelam esse ipsi ΤΠ. Ostensum est autem et rectam ΚΒ parallelam esse ipsi ΣΟ; recta igitur ΣΟ parallela est ipsi ΤΠ; quadrilaterum igitur ΣΟΠΤ in uno est plano. Propter eadem utique et quadrilaterum ΤΠΡΥ est in uno plano. *Peyr.*

Λέγω δὴ ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάψεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστιν ὁ ΖΗΘ κύκλος. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΨ, ΨΟ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΨ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΨ, ἡ ΑΨ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΟ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΟ, ἴσον ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΟ. Καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΟ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΟ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨΟ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΟ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ

τὰ Κ, Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ, ΨΟ· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ψ, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΨΒ, ΨΟ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Κ, Σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον *).

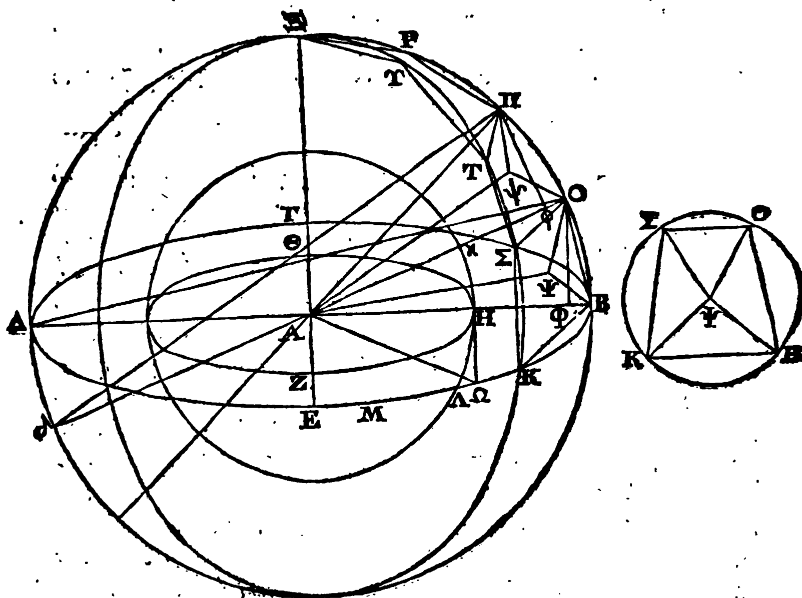
Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς ΧΦ, ἴση δὲ ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ· μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΣΟ. Ἴση δὲ ἡ ΚΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΟ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. Καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ο σημείου ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἡ ΟΦ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΦ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΦ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΦ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΦ, ΦΒ· ἀναγραφομένου δὴ ἀπὸ τῆς ΒΦ τετραγώνου, καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΦΔ παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΦ ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΦ, ΦΒ ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. Καὶ ἔτι τῆς ΑΟ ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΦ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΟ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΦ, ΦΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΦ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΟΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΦ ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΟ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΦ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΟ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΟ. Καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΟΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΟΦ, ΦΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΟΦ, ΦΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΟΦ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΑ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΦ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. Καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν **).

*) Si a puncto A ad reliquorum quadrilaterorum plana perpendiculares ducantur, similiter utique ostendemus reliqua quadrilatera descripta fore in circulis. *Peyr.*

**) In omnibus manuscriptis, et in omnibus editionibus graecis, latinisque et aliis, figura ultimae partis huius propositionis, et eius *aliter* a librariis ita vitiata erat ut

ΑΛΛΩΣ.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΨ *τῆς* ΑΗ. *Ἤχθω ἀπὸ τοῦ* Η *τῇ* ΑΗ *πρὸς ὀρθὰς ἡ*



ΗΩ, *καὶ ἐπεζεύχθω ἡ* ΑΩ. *Τέμνοντες δὴ τὴν* ΕΒ *περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα περιφέρειαν, ἥ ἐστιν ἐλάσ-*

---

ratiocinatio cuius ope Euclides ostendit quadrilaterum ΚΒΟΣ non tangere minorem sphaeram, nequaquam conveniret reliquis quadrilateris, necnon ΥΡΞ triangulo. *Clavius* et postea *Robert Simson* hanc demonstrationem compleverunt; et egomet ipse illam eodem modo complevi in Euclide gallico quem edidi anno 1804. Postea autem cum in figurâ erroris alicuius suspicionem haberem, tentavi figuram quae et reliquis quadrilateri trianguloque congruens esset non solum in ultimâ parte huius propositionis, sed etiam et in *aliter*. Quam figuram tentaveram, illam denique reperi, ut in sequentibus unicuique videre licet.

Dico et ipsum ΣΟΠΤ neque tangere minorem sphaeram. Ducatur enim a puncto Α ad ΣΟΠΤ quadrilateri planum perpendicularis ΑΨ, et jungantur ΟΨ, ΨΠ,

σων τῆς ὑποτεινομένης τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου περιφερείας, ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ΗΩ. Λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ εὐθεῖα τῆς ΗΩ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΒΚΣΟ τετράπλευρον, καὶ εἴσιν ἴσαι αἱ ΟΒ, ΒΚ, ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΨΟ γωνία· μείζων ἄρα ἡ ΒΟ τῆς ΒΨ. Ἀλλὰ τῆς ΒΟ μείζων ἐστὶν ἡ ΗΩ· πολλῷ ἄρα ἡ ΗΩ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΨ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΩ τῇ ΑΒ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΩ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΩ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΩ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΩ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΩ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ.

Et quoniam maior est KB utrâque ipsarum ΣO, TΠ; aequalis autem KB utrique ipsarum ΣT, OΠ; utraque igitur ipsarum ΣT, OΠ maior erit utrâque ipsarum ΣO, TΠ. Et quoniam in circulo est quadrilaterum ΣOΠT, aequales autem sunt ipsae ΣT, OΠ, utraque vero ipsarum ΣO, TΠ minor est utrâque ipsarum ΣT, OΠ, atque ex centro circuli est ipsa Oψ, erit angulus OΨΠ obtusus; quadratum igitur ex OΠ maius est quam duplum quadrati ex Oψ. Ducatur autem a puncto Π ad Oδ perpendicularis Πφ, et producatur OA ad δ. Et quoniam Oδ minor est duplâ ipsius δφ, atque est ut Oδ ad δφ ita rectangulum sub δO, Oφ ad rectangulum sub δφ, φO; rectangulum igitur sub δO, Oφ minus est duplo rectanguli sub δφ, φO. Et iungatur ipsa Πδ; rectangulum quidem sub δO, Oφ aequale est quadrato ex OΠ, rectangulum vero sub δφ, φO aequale quadrato ex Πφ; quadratum igitur ex OΠ minus est duplo quadrati ex Πφ. Sed quadratum ex OΠ maius est duplo quadrati ex Oψ; quadratum igitur ex Πφ maius est quadrato ex Oψ. Et quoniam aequalis est OA ipsi AΠ, aequale erit quadratum ex OA quadrato ex AΠ. Et sunt quidem quadrato ex OA aequalia quadrata ex ipsis Oψ, ψA, quadrato autem ex AΠ aequalia quadrata ex ipsis Πφ, φA; quadrata igitur ex ipsis Oψ, ψA aequalia sunt quadratis ex Πφ, φA, ex quibus quadratum ex Πφ maius est quadrato ex Oψ; reliquum igitur quadratum ex Aψ maius est reliquo quadrato ex Aφ; maior igitur recta Aψ ipsâ Aφ; multo maior igitur recta ψA ipsâ Aη. Et est quidem recta Aψ perpendicularis ad ΣOΠT quadrilateri planum, recta vero Aη est recta ex centro minoris sphaerae; quadrilaterum igitur ΣOΠT non tangit

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγέγραπται, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. Διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοπληθεῖς καὶ ὁμοταγεῖς πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. Αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ πυρα-

---

minorem sphaeram. Similiter utique ostendetur neque quadrilaterum ΤΠΡΥ, neque triangulum ΥΡΞ tangere minorem sphaeram.

Perpendicularis a puncto A ad ΣΚΒΟ quadrilateri planum ducta intra hoc quadrilaterum cadit; Euclides hoc non demonstrat, quia haec demonstratio illum de viâ suâ amovisset sine ullâ necessitate. Etenim ut ostendatur ΣΚΒΟ quadrilateri planum non tangere minorem sphaeram, tantummodo est ostendendum perpendicularem a puncto A ad ΣΚΒΟ quadrilateri planum ductam minorem esse rectâ AH.

Utcumque autem se res habeat, sic ostendere licet circuli centrum cadere intra ΣΚΒΟ quadrilaterum. Etenim si circuli centrum non caderet intra hoc quadrilaterum, caderet vel in unum laterum ipsius, vel intra unum segmentorum circuli, quorum bases sunt quadrilateri latera. Dico circuli centrum non cadere in unum laterum quadrilateri ΣΚΒΟ. Etenim si circuli centrum caderet in unum laterum huius quadrilateri, hoc latus, existens circuli diameter, maius esset aliis quadrilateri lateribus, quod non ponitur; etenim ΣΚ, ΚΒ, ΒΟ latera inter se sunt aequalia, et latus ΣΟ minus est unoquoque ipsorum ΣΚ, ΚΒ, ΒΟ laterum. Dico rursus circuli centrum non cadere intra unum segmentorum circuli, quorum bases sunt ΣΚΒΟ quadrilateri latera. Etenim si circuli centrum intra unum horum segmentorum caderet, hoc segmentum semicirculo esset majus, et huius segmenti basis maior esset unoquoque reliquorum ΣΚΒΟ quadrilateri laterum; quod non ponitur. Similiter utique ostendetur circuli centrum cadere et intra reliqua quadrilatera et intra triangulum ΥΡΞ. *Peyrard.*

μὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν, ἤπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ τὸ κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. Ὁμοίως δὲ καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. Καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὥςτε καὶ ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΔ διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

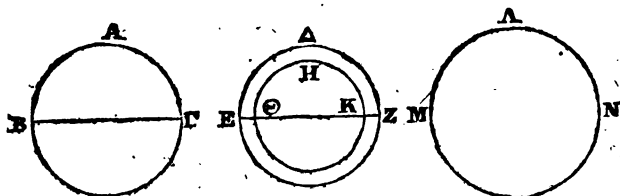
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰ γὰρ μὴ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ, καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ σφαῖρα τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ·

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. Μείζων δὲ



ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ πολυέδρου. Ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ἀπ᾽ αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. Ὡς δὲ ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάττονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας, ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜΝ τῆς ΔΕΖ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλάσιονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα· ἡ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

GLOSSARIUM

IN HOS OCTO LIBROS EUCLIDIS.

A.

Ἀγάγω vid. ἄγω.

ἄγω sive ἀγάγω duco, sc. lineam. Inde ἠγμένη sc. γραμμὴ — ἦκται — ἤχθω — ἤχθωσαν — ἀχθεὶς.

ἀδύνατος impossibilis — ἀδύνατον quod esse aut fieri nequit.

αἰτέω postulo, inde αἴτημα postulatum, propositio, quae aliquid efficere iubet, quod habet facilem, et cuivis obviam constructionem. — ᾐτήσθω postuletur, man fordere.

αἴτημα v. αἰτέω.

ἀκολούθως consequenter.

ἄκρα extremitas. — ἀπ' ἄκρας ab extremitate lineae cuiusdam.

ἄκρος extremus. — ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖαν τέμνειν extrema ac media ratione lineam secare. Sit e. g. linea recta AB ita in Γ divisa, ut $B\Gamma$ sit maior pars, $A\Gamma$ minor, linea dicetur ἄκρ. κ. μ. λ divisa, si $AB : B\Gamma = B\Gamma : A\Gamma$ — τὰ ἄκρα exteriores termini (primus et quartus) proportionis. — ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον rectangulum sub lineis, quae in proportione extremos terminos constituunt, contentum.

ἀμβλυγώνιος obtusum angulum habens; ab

ἀμβλὺς obtusus.

ἀναγράφω describo, e. g. lineam, figuram. Inde ἀναγεγραμμένος — ἀναγεγράφθω — ἀναγραφεὶς — ἀναγραφησόμενος.

ἀναλογία proportio, e. g. $\Delta : B = \Gamma : \Delta$. Ceterum tantum de proportionibus geometricis apud Euclidem agitur.

ἀνάλογος proportionalis. ἀνάλογον τέμνειν proportionaliter secare.

ἀνάπαλιν contrario, invertendo, durch Umkehrung, ἀνάπαλιν λόγος inversa ratio, ita ut secundus terminus prop. fiat primus et quartus tertius. Sit e. g. proportio $\Delta : B = \Gamma : \Delta$, quae ita inverti potest $B : \Delta = \Delta : \Gamma$.

ἀναστρέφω revertor. ἀναστρέψας — ἀναστρέψαντι revertendo, durch Zurückkehrung, i. e. si ponas in proportione: ut terminus antecedens ad excessum, quo antecedens consequentem superat, ita cet. vid. vocem sequentem.

ἀναστροφὴ conversio. ἀναστροφὴ λόγου conversa ratio; sit e. g. proportio $\Delta : B = \Gamma : \Delta$, ex qua fit per ἀναστροφὴν $\Delta : \Delta - B = \Gamma : \Gamma - \Delta$.

ἀνίστημι erigo, statuo. Inde ἀναστήσονται erigentur — ἀναστῆσαι.

ἀντιπάσχω contrario, reciproce afficior. Inde dicuntur σχήματα ἀντιπεπονθότα reciprocae figurae, quando in duabus figuris duo latera, quae angulum includunt, terminos

καθόλου omnino.
καλέω voco, nomino.
καταγράφω construo. — Inde καταγεγράφθω.
καταγραφή figura descripta, delineata, constructio.
κατακολουθέω subsequor. τοῖς ἐπάνω κατακολουθοῦντες subsequentes anteriora, in Gemäfsheit des Obigen.
καταλείπω relinquo. Inde καταλειπόμενον id quod relinquitur, altero quanto ab altero subtracto, der Rest.
κατάλληλος mutuo inter se. ληφθέντα κατάλληλα sumta inter se comparata.
καταμετρέω dimetior.
κατασκευάζω construo. τῶν αὐτῶν κατασκευασθέντων his eadem ratione constructis; nach derselben Construction.
κατασκευή constructio.
κεῖμαι positus sum, iaceo. — Inde κείσθω — κεῖται ponitur, es wird angenommen. — ὁμοίως κείμενα similiter posita.
κέντρον centrum.
κλάω frango, flecto. κεκλάσθω flectatur sc. angulus (p. 77 prop. 20.) ad peripheriam, $BA\Gamma$, ita ut vertex eius Δ semper in circumferentia maneat, donec ad punctum Δ veniat.
κλίνω inclino. ὁμοίως κλίνεσθαι similiter inclinatum esse.
κλίσις inclinatio.
κοιλὸς cavus. ἡ κοιλὴ περιφέρεια concavum latus peripheriae.
κοινὸς communis — κοιναὶ ἔννοιαι communes notiones, axiomata i. e. propositiones, quarum veritas ita perspicua est, ut nemo, qui verborum sensum intellexerit, de veritate asserti dubitare possit. ἡ κοινὴ sc. γραμμὴ sive γωνία communis linea, —sive angulus — τὸ κοινὸν sc. τρίγωνον commune triangulum.
κορυφὴ summum figurae, vertex; κορυφὴ τοῦ τριγώνου vertex trianguli, punctum quod basi oppositum est. — ἡ κατὰ κορυφὴν γωνία angulus ad verticem.
κύβος Cubus.
κύκλος circulus.
κυρτὸς convexus, ἡ κυρτὴ περιφέρεια convexum latus circumferentiae.
κῶνος Conus.

Λ.

Λαμβάνω sumo. Inde εἰλήφθω sumatur, sit — ληφθῇ — ληφθεὶς — εἴληπται — τὰ μέρη ληφθέντα κατ' ἄλληλα partes inter se comparatae — ληφθῶσι — λελήφθωσαν.
λέγω dico, affirmo. — λεγόμενος.
λῆμμα Lemma, ein Lehnsatz. Propositio, quae aliunde, i. e. ex alia propositionum serie sumta ad aliam propositionem demonstrandam in subsidium vocatur.
λόγος verbum, ratio, ein Verhältnifs. — λόγου ἕνεκα verbi, exempli gratia — ἐν αὐτῷ λόγῳ in eadem ratione — τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον eandem rationem habere. — Ceterum notandum, in Euclide solum de ratione geometrica sermonem esse.
λοιπὸς reliquus — τὸ λοιπὸν reliquum — ἡ λοιπὴ sc. γραμμὴ vel γωνία reliqua pars lineae vel anguli.

M.

Μέγας magnus. Inde μείζων — μέγιστος.
μέγεθος magnitudo.
μενοῦν itaque, igitur.
μένω maneo. ἡ μένουσα εὐθεῖα linea recta manens, immobilis. — πλευρὰ μένουσα immobile latus.
μέρος pars, latus. — ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος ad idem latus.
μέσος medius. μέση ἀνάλογον media linea proportionalis. —